

1

Tensores

1.1 Introducción

Muchos fenómenos físicos se representan matemáticamente mediante *Tensores*, los cuales, por necesidad son representados en un sistema de referencia, de este modo surge el concepto de componentes del tensor. Si bien los tensores son independientes del sistema de referencia, las componentes serán dependientes y variarán con éste.

Los tensores pueden ser clasificados según su orden como:

Escalar (Tensor de orden 0): Cantidad que tiene magnitud pero no dirección (ejemplo: densidad, temperatura, presión). Los escalares pueden ser funciones del espacio y del tiempo y no necesariamente han de ser constantes.

Vector (Tensor de orden 1): Cantidad que tiene magnitud y dirección (ejemplo: velocidad, fuerza, momento, campo eléctrico). Será simbolizado por una letra en negrita con una flecha en la parte superior del tensor, *i.e.*: $\vec{\bullet}$.

Tensor de segundo orden (Tensor de orden 2): Cantidad que tiene magnitud y dos direcciones (ejemplo: tensión, deformación). Será simbolizado por una letra en negrita.

Para los tensores de órdenes superiores también usaremos letras en negrita.

Este capítulo trata del estudio detallado de los tensores (escalar, vector, tensor de segundo orden, y de orden superior), y de algunas herramientas matemáticas que darán soporte al desarrollo de las teorías que se exponen en los capítulos posteriores.

Primeramente, revisaremos algunas operaciones de vectores independientemente del sistema de coordenadas. A continuación, introduciremos el sistema de coordenadas rectangulares para expresar las componentes de un vector en dicho sistema. Una vez definido el sistema de referencia, podremos expresar las operaciones con vectores tan sólo

en función de sus componentes. Por último, expondremos la notación indicial por su simplicidad y fácil manipulación matemática.

Posteriormente estudiaremos los tensores de orden superior, poniendo especial énfasis en los tensores de segundo orden. Para finalizar, plantharemos los campos de tensiones y los sistemas de coordenadas cilíndricas y esféricas.

1.2 Vectores

A continuación presentamos algunas operaciones entre vectores en el espacio vectorial tridimensional Euclidiano (\mathcal{E}).

Suma

Sean los vectores \vec{a} y \vec{b} pertenecientes al espacio de vectores. La suma de los mismos, ver Figura 1.1(a), será otro vector (\vec{c}) dado por:

$$\vec{c} = \vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a} \quad (1.1)$$

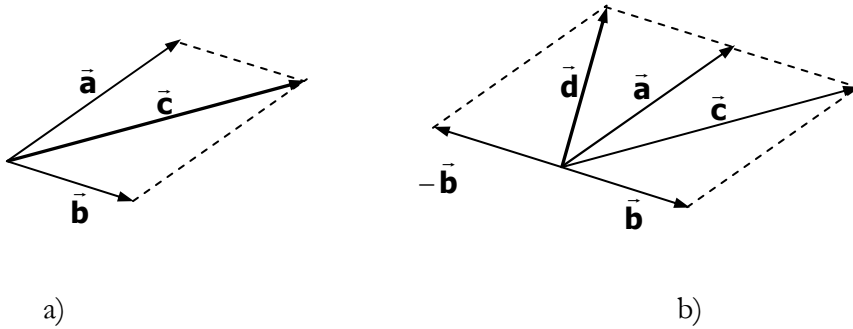


Figura 1.1: Suma y resta de vectores.

Resta

La resta de dos vectores (\vec{a} , \vec{b}), ver Figura 1.1(b), será otro vector (\vec{d}) dado por:

$$\vec{d} = \vec{a} - \vec{b} \quad (1.2)$$

Para los vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , pertenecientes al espacio de vectores, se cumplen las siguientes relaciones:

$$(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} + \vec{b} + \vec{c} \quad (1.3)$$

Producto por un escalar λ

Sea el vector \vec{a} , el producto $\lambda\vec{a}$ será un vector con la misma dirección de \vec{a} , mientras que su módulo y sentido dependerán del valor del escalar λ , tal y como se indica en la Figura 1.2.

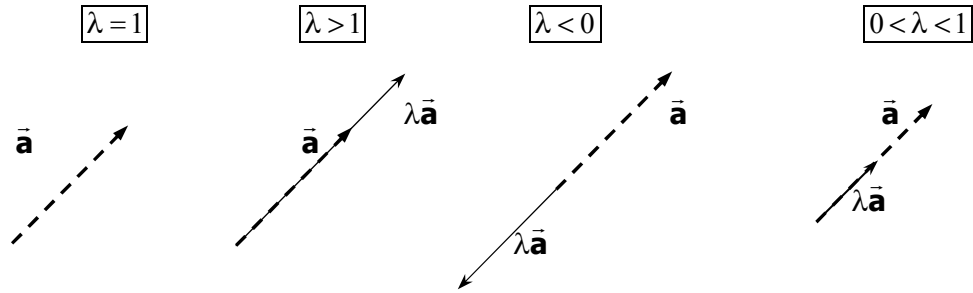


Figura 1.2: Producto de un vector por un escalar.

Producto Escalar

Sean los vectores \vec{a} y \vec{b} , se define el *Producto Escalar* de ambos vectores como un escalar γ de valor:

$$\gamma = \vec{a} \cdot \vec{b} = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \cos \theta \quad (1.4)$$

siendo θ el ángulo formado por los dos vectores, y $\|\cdot\|$ es el módulo (o magnitud) de \cdot , ver Figura 1.3(a). Se puede concluir también que $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$.

Para el caso en que $\vec{a} = \vec{b}$ obtenemos que:

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \cos \theta \xrightarrow{\theta=0^\circ} \vec{a} \cdot \vec{a} = \|\vec{a}\| \|\vec{a}\| \Rightarrow \|\vec{a}\| = \sqrt{\vec{a} \cdot \vec{a}} \quad (1.5)$$

Vector Unitario (versor)

Dado un vector \vec{a} , el versor (vector unitario) asociado a esta dirección será un vector \hat{a} con la misma dirección y sentido de \vec{a} , definido por:

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} \quad (1.6)$$

donde $\|\vec{a}\|$ es el módulo del vector \vec{a} . Si \hat{a} es un vector unitario, entonces debe cumplir que:

$$\|\hat{a}\| = 1 \quad (1.7)$$

Vector Nulo

El vector nulo viene representado por:

$$\vec{0} \quad (1.8)$$

Vector Proyección

El vector proyección del vector \vec{a} sobre el vector \vec{b} (Figura 1.3(b)) será un vector con la dirección de \vec{b} y con módulo de valor $\|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}\|$ dado por:

$$\|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \vec{a} \cdot \hat{\vec{b}} \quad (1.9)$$

donde $\hat{\vec{b}}$ es el versor según la dirección de \vec{b} , luego se cumple que:

$$\|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}\| = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \quad (1.10)$$

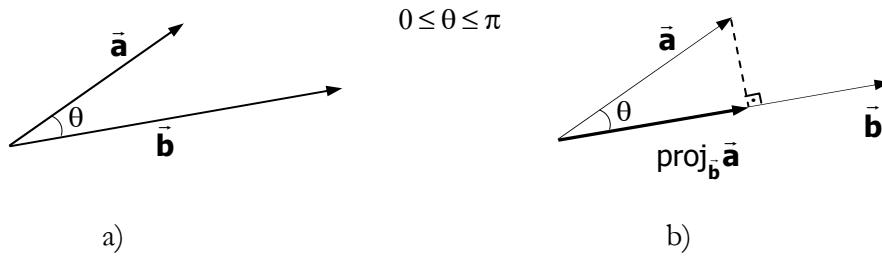


Figura 1.3: Producto escalar.

Podemos obtener el vector $\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}$ como su módulo $\|\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a}\|$ multiplicado por el versor según la dirección de \vec{b} :

$$\text{proj}_{\vec{b}} \vec{a} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\|} \frac{\vec{b}}{\|\vec{b}\|} = \underbrace{\frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{\|\vec{b}\| \|\vec{b}\|}}_{\text{escalar}} \vec{b} \quad (1.11)$$

Ortogonalidad de dos vectores

Dos vectores son ortogonales entre sí cuando se cumple la siguiente condición:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad (1.12)$$

Producto Vectorial

El producto vectorial de dos vectores \vec{a} y \vec{b} da como resultado un tercer vector \vec{c} que se caracteriza por ser perpendicular a estos dos vectores (Figura 1.4), y que posee las siguientes características:

- Representación:

$$\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a} \quad (1.13)$$

- Dado que \vec{c} es perpendicular a \vec{a} y a \vec{b} , se cumple entonces que:

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = \vec{b} \cdot \vec{c} = 0 \quad (1.14)$$

- El módulo de \vec{c} es por definición:

$$\|\vec{c}\| = \|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \theta \quad (1.15)$$

siendo θ el menor ángulo formado entre los vectores \vec{a} y \vec{b} , ver Figura 1.4.

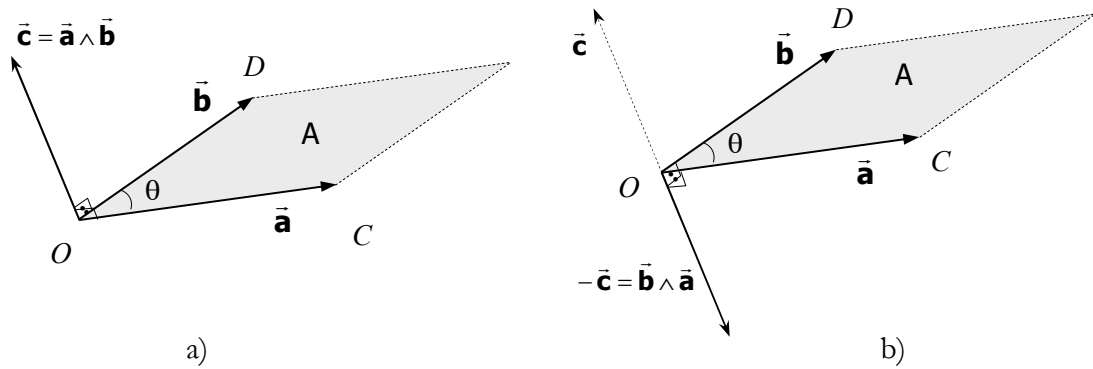


Figura 1.4: Producto vectorial.

El módulo del producto vectorial es el área (A) del paralelogramo formado por estos dos vectores, ver Figura 1.4:

$$A = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \quad (1.16)$$

y como consecuencia el área del triángulo formado por los puntos OCD (Figura 1.4(a)) será:

$$A_T = \frac{1}{2} \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| \quad (1.17)$$

Si \vec{a} y \vec{b} son colineales (linealmente dependiente, *i.e.* $\vec{a} = \alpha \vec{b}$, donde α es un escalar), el producto vectorial entre ellos resultará el vector nulo, $\vec{0}$.

Triple Producto Escalar

Dados tres vectores ($\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$) se denomina el *triple producto escalar* a:

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = V \\ V &= -\vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{b}) = -\vec{b} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{c}) = -\vec{c} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a}) \end{aligned} \quad (1.18)$$

El resultado de esta operación es el volumen del paralelepípedo (V) formado por estos tres vectores, tal y como se muestra en la Figura 1.5.

Luego, para vectores cualesquiera \vec{a}, \vec{b} se cumple que:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{a}) = \vec{0} \quad (1.19)$$

Dado los vectores $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}, \vec{d}$, y α, β escalares, la siguiente propiedad es válida:

$$(\alpha \vec{a} + \beta \vec{b}) \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) = \alpha \vec{a} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) + \beta \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{d}) \quad (1.20)$$

NOTA: Algunos autores representan el triple producto escalar por la siguiente nomenclatura, $[\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}] \equiv \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c})$, $[\vec{b}, \vec{c}, \vec{a}] \equiv \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a})$, $[\vec{c}, \vec{a}, \vec{b}] \equiv \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})$, y así sucesivamente. ■

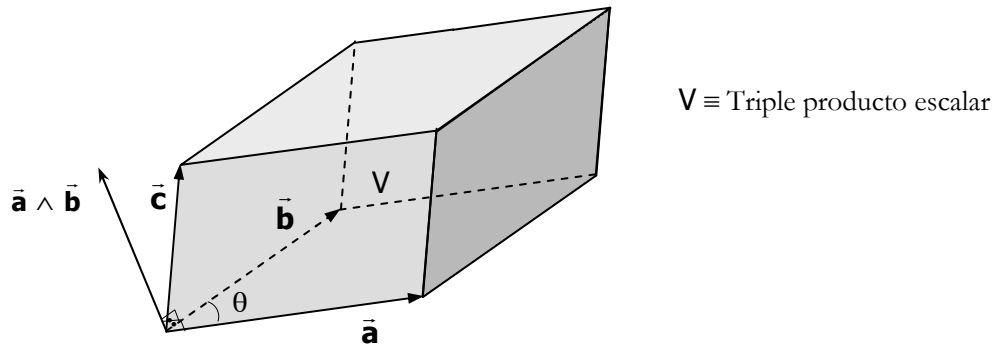


Figura 1.5: Triple producto escalar.

Triple Producto Vectorial

Dados tres vectores \vec{a} , \vec{b} y \vec{c} , el *triple producto vectorial* resulta un vector \vec{w} dado por $\vec{w} = \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c})$, siendo válidas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \vec{w} &= \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = -\vec{c} \wedge (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \vec{c} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{a}) \\ &= (\vec{c} \cdot \vec{a})\vec{b} - (\vec{c} \cdot \vec{b})\vec{a} \\ &= (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c} \end{aligned} \quad (1.21)$$

Observemos que el vector \vec{w} es un vector contenido en el plano Π_1 , formado por los vectores \vec{b} y \vec{c} , según se muestra en la Figura 1.6.

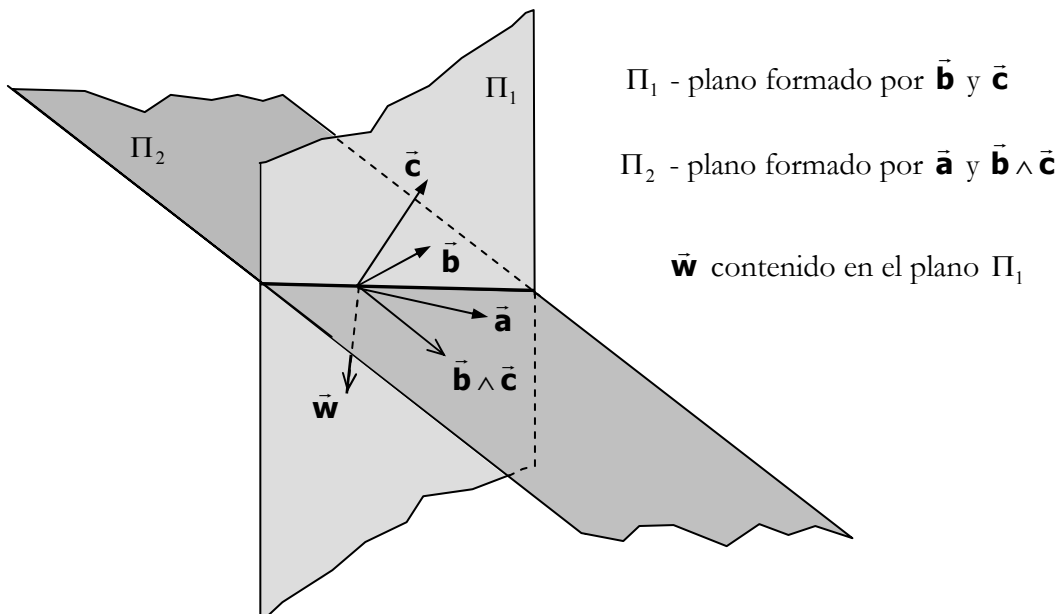


Figura 1.6: Triple producto vectorial.

Ejemplo 1.1: Probar que si $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ son vectores se cumple que:

$$(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2$$

Solución:

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) &= \|\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}\|^2 \\ &= (\|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \sin \theta)^2 \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 \sin^2 \theta \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - (\|\vec{\mathbf{a}}\| \|\vec{\mathbf{b}}\| \cos \theta)^2 \\ &= \|\vec{\mathbf{a}}\|^2 \|\vec{\mathbf{b}}\|^2 - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2 \\ &= (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}})^2 \end{aligned}$$

donde hemos considerado que $\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \|\vec{\mathbf{a}}\|^2$ y $\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = \|\vec{\mathbf{b}}\|^2$.

Transformación Lineal

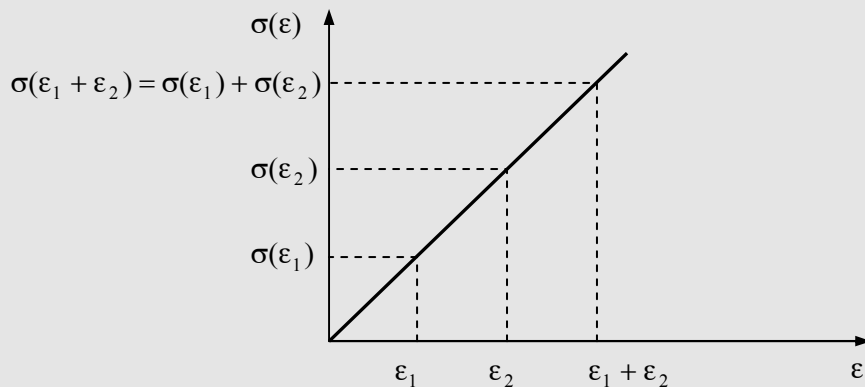
Decimos que una transformación F es una transformación lineal cuando dados dos vectores $\vec{\mathbf{u}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ y un escalar α se cumplen que:

- $F(\vec{\mathbf{u}} + \vec{\mathbf{v}}) = F(\vec{\mathbf{u}}) + F(\vec{\mathbf{v}})$
- $F(\alpha \vec{\mathbf{u}}) = \alpha F(\vec{\mathbf{u}})$

Ejemplo 1.2: Verificar si para las siguientes transformaciones $\sigma(\varepsilon) = E\varepsilon$ y $\psi(\varepsilon) = \frac{1}{2}E\varepsilon^2$ son transformaciones lineales.

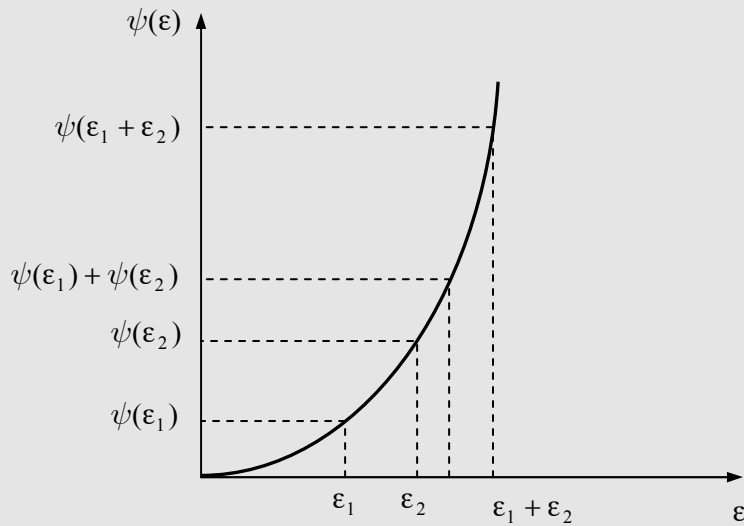
Solución:

$$\sigma(\varepsilon_1 + \varepsilon_2) = E[\varepsilon_1 + \varepsilon_2] = E\varepsilon_1 + E\varepsilon_2 = \sigma(\varepsilon_1) + \sigma(\varepsilon_2) \quad (\text{transformación lineal})$$



La transformación $\psi(\epsilon) = \frac{1}{2}E\epsilon^2$ se demuestra fácilmente que no es una transformación lineal ya que:

$$\begin{aligned}\psi(\epsilon_1 + \epsilon_2) &= \frac{1}{2}E[\epsilon_1 + \epsilon_2]^2 = \frac{1}{2}E[\epsilon_1^2 + 2\epsilon_1\epsilon_2 + \epsilon_2^2] \\ &= \frac{1}{2}E\epsilon_1^2 + \frac{1}{2}E\epsilon_2^2 + \frac{1}{2}E2\epsilon_1\epsilon_2 \\ &= \psi(\epsilon_1) + \psi(\epsilon_2) + E\epsilon_1\epsilon_2 \neq \psi(\epsilon_1) + \psi(\epsilon_2)\end{aligned}$$



1.3 Sistema de Coordenadas

Un tensor es una interpretación matemática de un concepto físico. Sus componentes adoptan valores que dependen del sistema de coordenadas elegido para representarlo, ver Figura 1.7.

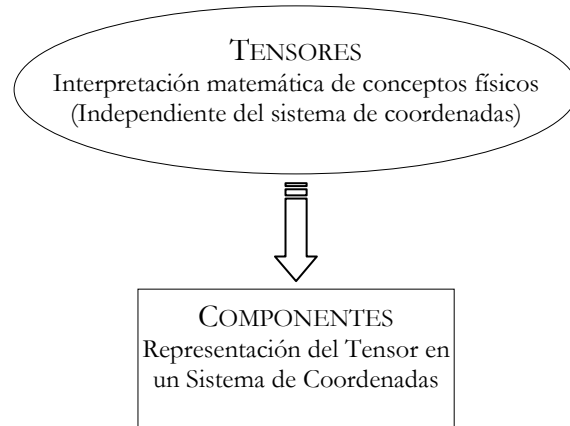


Figura 1.7: Esquema tensor-componentes.

Consideremos un tensor de orden uno ($\bar{\mathbf{a}}$) como el representado en la Figura 1.8(a), la representación de este tensor en un sistema de coordenadas genérico (ξ_1, ξ_2, ξ_3) se hace a través de sus componentes $(\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \mathbf{a}_3)$, ver Figura 1.8(b).

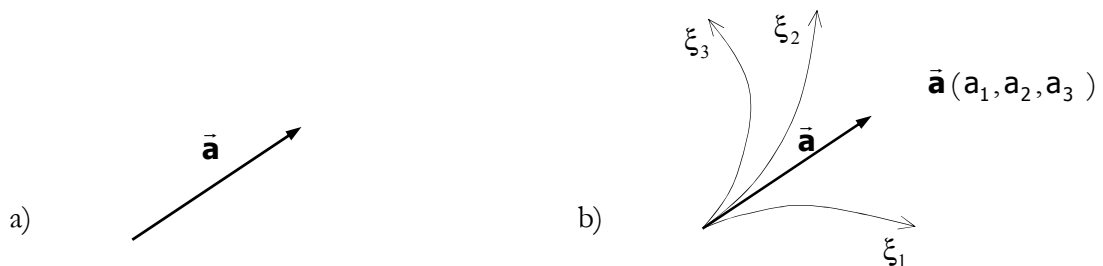


Figura 1.8: Representación de un vector.

Los sistemas de coordenadas pueden ser de varios tipos: coordenadas curvilíneas, coordenadas cartesianas rectangulares, coordenadas cilíndricas y coordenadas esféricas, entre otros.

1.3.1 Sistema de Coordenadas Rectangulares

El sistema de coordenadas cartesianas rectangulares viene definido por tres vectores: $\hat{\mathbf{i}}$, $\hat{\mathbf{j}}$, $\hat{\mathbf{k}}$, los cuales constituyen una *base ortonormal*. Se entiende por base ortonormal, aquella que satisface las siguientes propiedades:

1. Los vectores que forman esta base son unitarios (versores):

$$\|\hat{\mathbf{i}}\| = \|\hat{\mathbf{j}}\| = \|\hat{\mathbf{k}}\| = 1 \quad (1.22)$$

o lo que es igual:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = 1 \quad (1.23)$$

2. Los vectores de esta base son ortogonales entre sí, es decir:

$$\hat{\mathbf{i}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{j}} \cdot \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{k}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = 0 \quad (1.24)$$

3. El Producto vectorial entre los versores que forman esta base cumple lo siguiente:

$$\hat{\mathbf{i}} \wedge \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}} \quad ; \quad \hat{\mathbf{j}} \wedge \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}} \quad ; \quad \hat{\mathbf{k}} \wedge \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}} \quad (1.25)$$

Para conocer el sentido del vector resultante del producto vectorial utilizamos la regla de la mano derecha, tal y como se indica en la Figura 1.9.

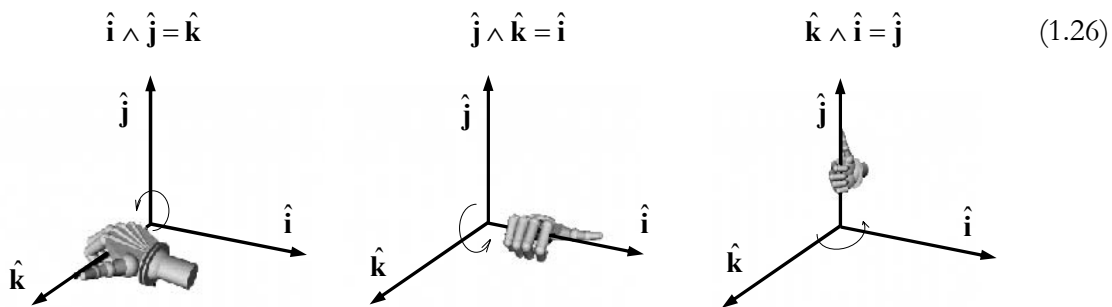


Figura 1.9: Regla de la mano derecha.

1.3.2 Representación de los Vectores en el Sistema de Coordenadas Cartesianas

En el sistema de coordenadas cartesianas, el vector $\vec{\mathbf{a}}$ (Figura 1.10) está representado por sus componentes (\mathbf{a}_x , \mathbf{a}_y , \mathbf{a}_z) como:

$$\vec{\mathbf{a}} = a_x \hat{\mathbf{i}} + a_y \hat{\mathbf{j}} + a_z \hat{\mathbf{k}} \quad (1.27)$$

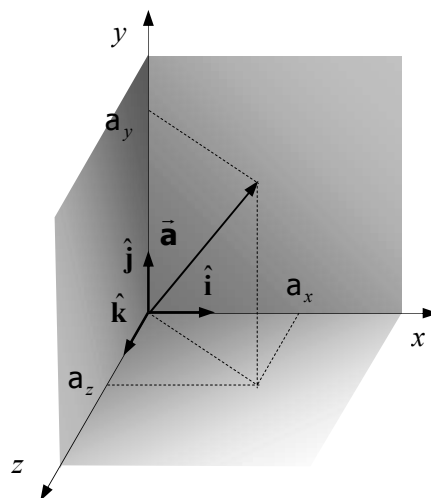


Figura 1.10: Vector en el sistema cartesiano.

Las operaciones básicas particularizadas a este sistema de referencia son:

- **Producto Escalar** de dos vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\begin{aligned}\vec{a} \cdot \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z)\end{aligned}\quad (1.28)$$

Luego, se cumple que $\vec{a} \cdot \vec{a} = a_x a_x + a_y a_y + a_z a_z = a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = \|\vec{a}\|^2$

NOTA: La proyección de un vector sobre una dirección determinada obtenemos a través del producto escalar del vector y del versor que define esa dirección. Como ejemplo, si quisiéramos obtener la componente del vector \vec{a} según la dirección y (representado por su versor \hat{j}) es suficiente con: $\vec{a} \cdot \hat{j} = (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) \cdot (\hat{j}) = a_y$. ■

- **módulo** del vector \vec{a}

$$\|\vec{a}\| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (1.29)$$

- **vector unitario** correspondiente al vector \vec{a}

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{\|\vec{a}\|} = \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{i} + \frac{a_y}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{j} + \frac{a_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}} \hat{k} \quad (1.30)$$

- **vector nulo**

$$\vec{0} = 0 \hat{i} + 0 \hat{j} + 0 \hat{k} \quad (1.31)$$

- **Suma** de dos vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\begin{aligned}\vec{a} + \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) + (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_x + b_x) \hat{i} + (a_y + b_y) \hat{j} + (a_z + b_z) \hat{k}\end{aligned}\quad (1.32)$$

- **Resta** de dos vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\begin{aligned}\vec{a} - \vec{b} &= (a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k}) - (b_x \hat{i} + b_y \hat{j} + b_z \hat{k}) \\ &= (a_x - b_x) \hat{i} + (a_y - b_y) \hat{j} + (a_z - b_z) \hat{k}\end{aligned}\quad (1.33)$$

- **Multiplicación** por un escalar λ

$$\lambda \vec{a} = \lambda a_x \hat{i} + \lambda a_y \hat{j} + \lambda a_z \hat{k} \quad (1.34)$$

- **Producto Vectorial** de dos vectores \vec{a} y \vec{b}

$$\begin{aligned}\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix} \hat{k} \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \hat{i} - (a_x b_z - a_z b_x) \hat{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \hat{k}\end{aligned}\quad (1.35)$$

donde el símbolo $|\bullet| \equiv \det(\bullet)$ se emplea para indicar el determinante de una matriz.

- **Triple Producto Escalar** de los vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ en términos de sus componentes viene definido por:

$$\begin{aligned} V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \vec{a} \cdot (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \wedge \vec{a}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \\ &= a_x \begin{vmatrix} b_y & b_z \\ c_y & c_z \end{vmatrix} - a_y \begin{vmatrix} b_x & b_z \\ c_x & c_z \end{vmatrix} + a_z \begin{vmatrix} b_x & b_y \\ c_x & c_y \end{vmatrix} \\ &= a_x (b_y c_z - b_z c_y) - a_y (b_x c_z - b_z c_x) + a_z (b_x c_y - b_y c_x) \end{aligned} \quad (1.36)$$

- **Triple Producto Vectorial** de los vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ en función de sus componentes es:

$$\begin{aligned} \vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) &= (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \\ &= (\lambda_1 b_x - \lambda_2 c_x) \hat{i} + (\lambda_1 b_y - \lambda_2 c_y) \hat{j} + (\lambda_1 b_z - \lambda_2 c_z) \hat{k} \end{aligned} \quad (1.37)$$

con $\lambda_1 = \vec{a} \cdot \vec{c} = a_x c_x + a_y c_y + a_z c_z$, y $\lambda_2 = \vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$.

Ejemplo 1.3: Considérense los puntos $A(1,3,1)$, $B(2,-1,1)$, $C(0,1,3)$ y $D(1,2,4)$.

Se pide:

- 1) Encontrar el área del paralelogramo definido por \vec{AB} y \vec{AC} ;
- 2) Encontrar el volumen del paralelepípedo definido por: \vec{AB} , \vec{AC} y \vec{AD} ;
- 3) Encontrar el vector proyección del vector \vec{AB} sobre el vector \vec{BC} .

Solución:

- 1) Primero se calculan los vectores \vec{AB} y \vec{AC} :

$$\vec{a} = \vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (2\hat{i} - 1\hat{j} + 1\hat{k}) - (1\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}) = 1\hat{i} - 4\hat{j} + 0\hat{k}$$

$$\vec{b} = \vec{AC} = \vec{OC} - \vec{OA} = (0\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}) - (1\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}) = -1\hat{i} - 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

Utilizando la definición (1.35) se obtiene el producto vectorial:

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & -4 & 0 \\ -1 & -2 & 2 \end{vmatrix} = (-8)\hat{i} - 2\hat{j} + (-6)\hat{k}$$

El área del paralelogramo será igual al módulo del vector resultante del producto vectorial:

$$A = \|\vec{a} \wedge \vec{b}\| = \sqrt{(-8)^2 + (-2)^2 + (-6)^2} = \sqrt{104} \quad (\text{unidades cuadradas})$$

- 2) Calculando vector \vec{AD} :

$$\vec{c} = \vec{AD} = \vec{OD} - \vec{OA} = (1\hat{i} + 2\hat{j} + 4\hat{k}) - (1\hat{i} + 3\hat{j} + 1\hat{k}) = 0\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k}$$

Utilizando la definición (1.36):

$$\begin{aligned} V(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}) &= \|\vec{c} \cdot (\vec{a} \wedge \vec{b})\| = \|(0\hat{i} - 1\hat{j} + 3\hat{k}) \cdot (-8\hat{i} - 2\hat{j} - 6\hat{k})\| \\ &= \|0 + 2 - 18\| = 16 \text{ (unidades cúbicas)} \end{aligned}$$

3) A continuación calculamos el vector \vec{BC} :

$$\vec{BC} = \vec{OC} - \vec{OB} = (0\hat{i} + 1\hat{j} + 3\hat{k}) - (2\hat{i} - 1\hat{j} + 1\hat{k}) = -2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}$$

Utilizando la ecuación (1.11):

$$\begin{aligned} \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{AB} &= \frac{\vec{BC} \cdot \vec{AB}}{\vec{BC} \cdot \vec{BC}} \vec{BC} = \frac{(-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (1\hat{i} - 4\hat{j} + 0\hat{k})}{(-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \cdot (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k})} (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ &= \frac{(-2 - 8 + 0)}{(4 + 4 + 4)} (-2\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}) \\ \text{proj}_{\vec{BC}} \vec{AB} &= \frac{5}{3} \hat{i} - \frac{5}{3} \hat{j} - \frac{5}{3} \hat{k} \end{aligned}$$

1.3.3 Convenio de Suma de Einstein

Definimos en la ecuación (1.27) la representación de un vector \vec{a} en el sistema de coordenadas rectangular:

$$\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} + a_z \hat{k} \quad (1.38)$$

Podemos reescribir la ecuación anterior como:

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \quad (1.39)$$

donde hemos considerado que: $a_1 \equiv a_x$, $a_2 \equiv a_y$, $a_3 \equiv a_z$, $\hat{e}_1 \equiv \hat{i}$, $\hat{e}_2 \equiv \hat{j}$, $\hat{e}_3 \equiv \hat{k}$, tal y como se indica en la Figura 1.11. De esta forma podemos expresar la ecuación (1.39) como una suma:

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = \sum_{i=1}^3 a_i \hat{e}_i \quad (1.40)$$

o simplemente utilizando el convenio de suma o *Notación de Einstein*, según la cual, se utilizan índices repetidos para indicar suma, así pues la expresión (1.40) queda de la siguiente manera:

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 = a_i \hat{e}_i \quad (i=1,2,3) \quad (1.41)$$

$$\boxed{\vec{a} = a_i \hat{e}_i \quad (i=1,2,3)}$$

NOTA: La notación de suma fue introducida por Albert Einstein en 1916, dando origen así a la notación indicial. ■

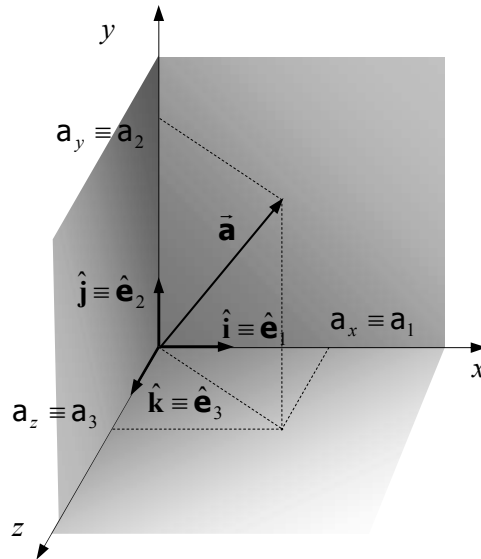


Figura 1.11: Vector en el sistema cartesiano.

1.4 Notación Indicial

Utilizando notación indicial los ejes del sistema de coordenadas son designados por la letra x con un subíndice. Por eso x_i no representa un único valor, sino i valores, es decir x_1, x_2, x_3 (si $i=1,2,3$) donde estos valores (x_1, x_2, x_3) corresponden respectivamente a los ejes (x, y, z).

En un sistema de coordenadas cartesianas, un vector \vec{a} será representado por sus componentes en la base del citado sistema de la siguiente forma:

$$\vec{a} = a_1 \hat{e}_1 + a_2 \hat{e}_2 + a_3 \hat{e}_3 \quad (1.42)$$

donde $\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3$ son versores (vectores unitarios), tal y como se muestra en la Figura 1.12, y a_1, a_2, a_3 son las componentes del vector. En notación indicial las componentes del vector serán representadas por a_i . Si no se indica el rango del subíndice, se supondrá que adopta los valores 1,2,3. Por tanto, las componentes de vector pueden representarse de la siguiente forma:

$$(\vec{a})_i = a_i = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} \quad (1.43)$$

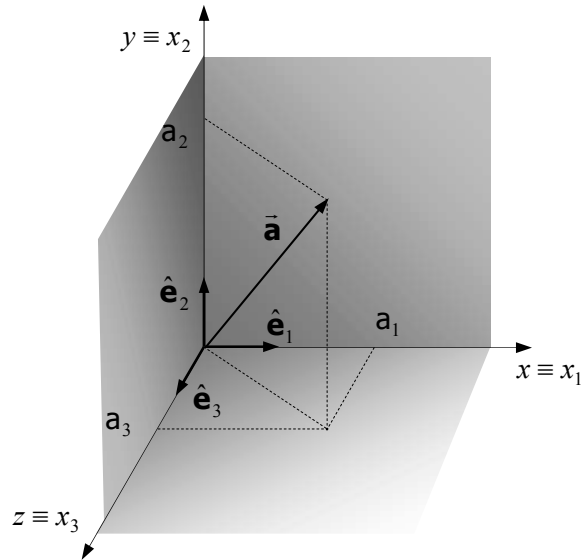


Figura 1.12: Vector en el sistema cartesiano.

Componentes del Vector Unitario: Dado un vector $\bar{\mathbf{a}}$, el vector unitario asociado a esta dirección será un vector $\hat{\mathbf{a}}$ dado por:

$$\hat{\mathbf{a}} = \frac{\bar{\mathbf{a}}}{\|\bar{\mathbf{a}}\|} \quad \text{con} \quad \|\hat{\mathbf{a}}\| = 1 \quad (1.44)$$

cuyas componentes serán:

$$\hat{a}_i = \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}} = \frac{a_i}{\sqrt{a_j a_j}} = \frac{a_i}{\sqrt{a_k a_k}} \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.45)$$

Los subíndices se denominan de 2 formas:

Subíndices libres aquellos que sólo aparecen una vez en un término de la expresión. En la ecuación anterior el subíndice libre es el subíndice (i). El número de subíndices libres indica el orden del tensor.

Subíndices mudos son los subíndices que se repiten en una expresión indicando suma. En la ecuación anterior (1.45) son, o bien el (j), o bien el (k).

OBS.: Un subíndice en un término de una expresión sólo puede aparecer una o dos veces. En el caso de que aparezca tres o más veces, entonces la expresión es incorrecta.

Producto Escalar: Utilizando las definiciones (1.4) y (1.28), podemos expresar el producto escalar en notación indicial de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \gamma &= \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \|\bar{\mathbf{a}}\| \|\bar{\mathbf{b}}\| \cos \theta \\ \gamma &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = a_i b_i = a_j b_j \quad (i, j = 1, 2, 3) \end{aligned} \quad (1.46)$$

Ejemplo 1.4: Reescribir en notación indicial las siguientes expresiones:

$$1) a_1 x_1 x_3 + a_2 x_2 x_3 + a_3 x_3 x_3$$

Solución: $a_i x_i x_3 \quad (i=1,2,3)$

$$2) x_1 x_1 + x_2 x_2$$

Solución: $x_i x_i \quad (i=1,2)$

$$3) \begin{cases} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = b_x \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = b_y \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = b_z \end{cases}$$

Solución:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{índice mudo } j} \begin{cases} a_{1j}x_j = b_1 \\ a_{2j}x_j = b_2 \\ a_{3j}x_j = b_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{índice libre } i} \boxed{a_{ij}x_j = b_i}$$

Como podemos apreciar, la utilización de la notación indicial supone que la expresión quede muy concisa. En muchos casos, tratar de realizar manipulaciones algebraicas sin utilizar notación indicial o tensorial es casi imposible debido a la gran cantidad de términos que pueden intervenir.

Ejemplo 1.5: Expandir la expresión: $A_{ij}x_i x_j \quad (i, j = 1,2,3)$

Solución: Los índices i, j son índices mudos (índice sumado), no hay índice libre, y como resultado tenemos un escalar. Expandimos primero el índice mudo i y a continuación el índice j , resultando así:

$$\begin{array}{c} A_{ij}x_i x_j \xrightarrow{\text{expandiendo } i} \underbrace{A_{1j}x_1 x_j} + \underbrace{A_{2j}x_2 x_j} + \underbrace{A_{3j}x_3 x_j} \\ \begin{array}{ccc} A_{11}x_1 x_1 & A_{21}x_2 x_1 & A_{31}x_3 x_1 \\ + & + & + \\ A_{12}x_1 x_2 & A_{22}x_2 x_2 & A_{32}x_3 x_2 \\ + & + & + \\ A_{13}x_1 x_3 & A_{23}x_2 x_3 & A_{33}x_3 x_3 \end{array} \end{array}$$

Reagrupando los términos anteriores obtenemos:

$$A_{ij}x_i x_j = A_{11}x_1 x_1 + A_{12}x_1 x_2 + A_{13}x_1 x_3 + A_{21}x_2 x_1 + A_{22}x_2 x_2 + A_{23}x_2 x_3 + A_{31}x_3 x_1 + A_{32}x_3 x_2 + A_{33}x_3 x_3$$

1.4.1.1 Delta de Kronecker

El símbolo *delta de Kronecker* δ_{ij} definimos de la manera siguiente:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad (1.47)$$

Observemos también que el producto escalar de la base ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j$ es 1 si $i = j$ y 0 si $i \neq j$. Si lo anterior lo exponemos de forma explícita, obtendremos:

$$\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} \quad (1.48)$$

Una propiedad muy interesante de la delta de Kronecker la demostraremos a continuación con el siguiente ejemplo, sea un vector (\vec{V}) de componentes (V_i) se cumple:

$$\delta_{ij} V_i = \delta_{1j} V_1 + \delta_{2j} V_2 + \delta_{3j} V_3 \quad (1.49)$$

luego, como ($j=1,2,3$) es un índice libre tenemos:

$$\left. \begin{aligned} j=1 &\Rightarrow \delta_{ij} V_i = \delta_{11} V_1 + \delta_{21} V_2 + \delta_{31} V_3 = V_1 \\ j=2 &\Rightarrow \delta_{ij} V_i = \delta_{12} V_1 + \delta_{22} V_2 + \delta_{32} V_3 = V_2 \\ j=3 &\Rightarrow \delta_{ij} V_i = \delta_{13} V_1 + \delta_{23} V_2 + \delta_{33} V_3 = V_3 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \delta_{ij} V_i = V_j \quad (1.50)$$

Es decir, en la presencia del símbolo Delta de Kronecker reemplazamos el índice repetido, tal y como se indica a continuación:

$$\delta_{\emptyset j} V_{\emptyset} = V_j \quad (1.51)$$

Por esta razón, la delta de Kronecker es frecuentemente llamada *operador de sustitución*. Otros ejemplos:

$$\begin{aligned} \delta_{ij} A_{ik} &= A_{jk} \\ \delta_{ij} \delta_{ji} &= \delta_{ii} = \delta_{jj} = \delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33} = 3 \\ \delta_{ji} a_{ji} &= a_{ii} = a_{jj} = a_{11} + a_{22} + a_{33} \end{aligned} \quad (1.52)$$

Más aún, se puede decir que:

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial x_1} & \frac{\partial x_1}{\partial x_2} & \frac{\partial x_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_2}{\partial x_1} & \frac{\partial x_2}{\partial x_2} & \frac{\partial x_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial x_3}{\partial x_1} & \frac{\partial x_3}{\partial x_2} & \frac{\partial x_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \delta_{ij} \quad (1.53)$$

Sea la base ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_i$, podemos obtener las componentes del vector $\vec{\mathbf{a}}$ en esta base como:

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = a_p \hat{\mathbf{e}}_p \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = a_p \delta_{pi} = a_i \quad (1.54)$$

Con eso podemos representar un vector como:

$$\bar{\mathbf{a}} = a_i \hat{\mathbf{e}}_i = (\bar{\mathbf{a}} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i) \hat{\mathbf{e}}_i \quad (1.55)$$

Ejemplo 1.6: Resolver las siguientes expresiones:

1) $\delta_{ii} \delta_{jj}$

Solución: $\delta_{ii} \delta_{jj} = (\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33})(\delta_{11} + \delta_{22} + \delta_{33}) = 3 \times 3 = 9$

2) $\delta_{\alpha 1} \delta_{\alpha \gamma} \delta_{\gamma 1}$

Solución: $\delta_{\alpha 1} \delta_{\alpha \gamma} \delta_{\gamma 1} = \delta_{\gamma 1} \delta_{\gamma 1} = \delta_{11} = 1$

NOTA: Observar que es incorrecto hacer la siguiente operación

$\delta_{\gamma 1} \delta_{\gamma 1} \neq \delta_{\gamma \gamma} = 3 \neq \delta_{11} = 1$, ya que lo que se reemplaza es el índice repetido ■

1.4.1.2 Símbolo de Permutación

El símbolo de permutación ϵ_{ijk} viene definido como:

$$\epsilon_{ijk} \equiv \begin{cases} +1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(1,2,3), (2,3,1), (3,1,2)\} \\ -1 & \text{si } (i, j, k) \in \{(1,3,2), (3,2,1), (2,1,3)\} \\ 0 & \text{para el resto de casos i.e.: si } (i=j) \text{ o } (j=k) \text{ o } (i=k) \end{cases} \quad (1.56)$$

NOTA: ϵ_{ijk} son las componentes del *Pseudo-tensor Levi-Civita*, que será definido mas adelante. ■

Otra forma de expresar este operador es a través de sus subíndices:

$$\epsilon_{ijk} = \frac{1}{2}(i-j)(j-k)(k-i) \quad (1.57)$$

Los valores de ϵ_{ijk} pueden ser fácilmente memorizados si utilizamos la Figura 1.13(a).

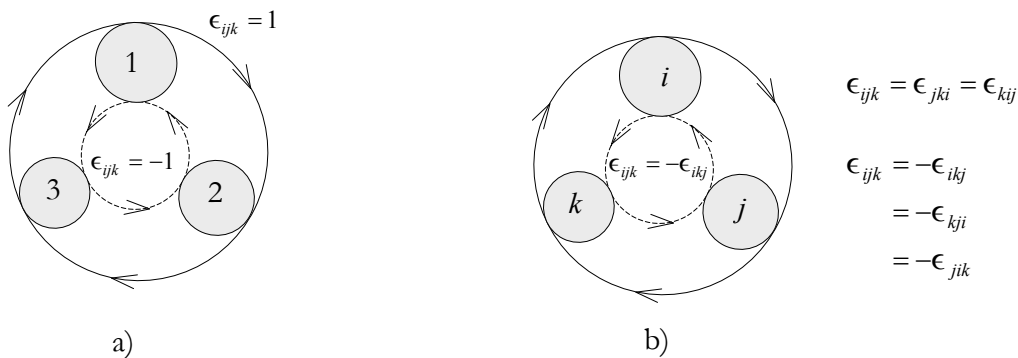


Figura 1.13: Símbolo de permutación.

Con la definición (1.67) y utilizando la Figura 1.13(b) podemos comprobar que las siguientes relaciones son válidas:

$$\begin{aligned} \epsilon_{ijk} &= \epsilon_{jki} = \epsilon_{kij} \\ \epsilon_{ijk} &= -\epsilon_{ikj} = -\epsilon_{kji} = -\epsilon_{jik} \end{aligned} \quad (1.58)$$

Si expresamos el símbolo de permutación en función de la delta de Kronecker (operador de sustitución), obtenemos:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} &= \epsilon_{lmn} \delta_{li} \delta_{mj} \delta_{nk} \\ &= \delta_{1i} \delta_{2j} \delta_{3k} - \delta_{1i} \delta_{3j} \delta_{2k} - \delta_{2i} \delta_{1j} \delta_{3k} + \delta_{3i} \delta_{1j} \delta_{2k} + \delta_{2i} \delta_{3j} \delta_{1k} - \delta_{3i} \delta_{2j} \delta_{1k} \\ &= \delta_{1i} (\delta_{2j} \delta_{3k} - \delta_{3j} \delta_{2k}) - \delta_{1j} (\delta_{2i} \delta_{3k} - \delta_{3i} \delta_{2k}) + \delta_{1k} (\delta_{2i} \delta_{3j} - \delta_{3i} \delta_{2j})\end{aligned}\quad (1.59)$$

lo que es igual al resultado del siguiente determinante:

$$\epsilon_{ijk} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{1j} & \delta_{1k} \\ \delta_{2i} & \delta_{2j} & \delta_{2k} \\ \delta_{3i} & \delta_{3j} & \delta_{3k} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix}\quad (1.60)$$

Por lo tanto podemos expresar el producto $\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr}$ como el producto de dos determinantes que definimos a continuación:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{1i} & \delta_{2i} & \delta_{3i} \\ \delta_{1j} & \delta_{2j} & \delta_{3j} \\ \delta_{1k} & \delta_{2k} & \delta_{3k} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \delta_{1p} & \delta_{1q} & \delta_{1r} \\ \delta_{2p} & \delta_{2q} & \delta_{2r} \\ \delta_{3p} & \delta_{3q} & \delta_{3r} \end{vmatrix}\quad (1.61)$$

Si tenemos en cuenta que dadas dos matrices cuadradas se cumple que $\det(\mathbf{AB}) = \det(\mathbf{A})\det(\mathbf{B})$, donde $\det(\bullet) \equiv |\bullet|$ es el determinante de la matriz \bullet , la relación (1.61) resulta ser:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqr} = \begin{vmatrix} \delta_{ip} & \delta_{iq} & \delta_{ir} \\ \delta_{jp} & \delta_{jq} & \delta_{jr} \\ \delta_{kp} & \delta_{kq} & \delta_{kr} \end{vmatrix}\quad (1.62)$$

Observemos que el término δ_{ip} fue obtenido a través de la operación: $\delta_{1i} \delta_{1p} + \delta_{2i} \delta_{2p} + \delta_{3i} \delta_{3p} = \delta_{mi} \delta_{mp} = \delta_{ip}$, análogamente podemos obtener el resto de términos.

Para el caso particular en el que $r = k$ la relación (1.62) puede expresarse como:

$$\boxed{\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp} \quad i, j, k, p, q = 1, 2, 3}\quad (1.63)$$

Ejemplo 1.7: a) Probar que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} = 2\delta_{ip}$ y que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 6$. b) Obtener el valor numérico de la siguiente expresión $\epsilon_{ijk} \delta_{2j} \delta_{3k} \delta_{1i}$.

Solución: a) Utilizando la expresión (1.63):

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{pqk} = \delta_{ip} \delta_{jq} - \delta_{iq} \delta_{jp}$$

y haciendo $q = j$, resulta:

$$\begin{aligned}\epsilon_{ijk} \epsilon_{pjk} &= \delta_{ip} \delta_{jj} - \delta_{ij} \delta_{jp} \\ &= \delta_{ip} 3 - \delta_{ip} = 2\delta_{ip}\end{aligned}$$

Partiendo del resultado anterior, es trivial la siguiente comprobación:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ijk} = 2\delta_{ii} = 6$$

b) $\epsilon_{ijk} \delta_{2j} \delta_{3k} \delta_{1i} = \epsilon_{123} = 1$

- **El Producto Vectorial** de dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ resultará un vector $\vec{\mathbf{c}}$, definido en (1.35), y viene dado por:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{c}} = \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{(a_2 b_3 - a_3 b_2)}_{c_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \underbrace{(a_3 b_1 - a_1 b_3)}_{c_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}_{c_3} \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (1.64)$$

Podemos utilizar la definición del símbolo de permutación ϵ_{ijk} , definido en (1.56), y expresar las componentes de $\vec{\mathbf{c}}$ como:

$$\left. \begin{aligned}c_1 &= \epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2 = \epsilon_{1jk} a_j b_k \\ c_2 &= \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3 = \epsilon_{2jk} a_j b_k \\ c_3 &= \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1 = \epsilon_{3jk} a_j b_k\end{aligned} \right\} \Rightarrow c_i = \epsilon_{ijk} a_j b_k \quad (1.65)$$

Luego, el producto vectorial, entre dos vectores $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, podrá ser representado a través del símbolo de permutación como:

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}} = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i \quad (1.66)$$

Podemos relacionar el operador de permutación con la base ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_i$ a través del triple producto escalar de dicha base:

$$\begin{aligned}\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j &= \epsilon_{ijm} \hat{\mathbf{e}}_m \\ (\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_k &= \epsilon_{ijm} \hat{\mathbf{e}}_m \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{ijm} \delta_{mk} \\ (\hat{\mathbf{e}}_i \wedge \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}_k &= \epsilon_{ijk}\end{aligned}\quad (1.67)$$

- **El Triple Producto Escalar** de los vectores $(\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}})$ viene dado por:

$$\lambda = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \quad (1.68)$$

En función del símbolo de permutación lo podemos expresar como:

$$\Rightarrow \lambda = \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \quad (i, j, k = 1, 2, 3) \quad (1.69)$$

Demostraremos que se cumplen $\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})$ partiendo de la relación (1.69), y además teniendo en cuenta las relaciones dadas en (1.58), obtenemos que:

$$\begin{aligned}[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}] &\equiv \vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = \epsilon_{ijk} a_i b_j c_k \\ &= \epsilon_{jki} a_j b_i c_k = \vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) \equiv [\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}}] \\ &= \epsilon_{kij} a_k b_j c_i = \vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \equiv [\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}] \\ &= -\epsilon_{ikj} a_i b_j c_k = -\vec{\mathbf{a}} \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \equiv -[\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{b}}] \\ &= -\epsilon_{jik} a_j b_i c_k = -\vec{\mathbf{b}} \cdot (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \equiv -[\vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{c}}] \\ &= -\epsilon_{kji} a_k b_j c_i = -\vec{\mathbf{c}} \cdot (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) \equiv -[\vec{\mathbf{c}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{a}}]\end{aligned}\quad (1.70)$$

Ejemplo 1.8: Escribir la siguiente relación $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}})$ sin emplear el producto vectorial.

Solución: Observemos que el producto vectorial $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})$ lo podemos expresar de la siguiente forma: $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) = a_j \hat{\mathbf{e}}_j \wedge b_k \hat{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i$, cuyo resultado será un vector. De esta forma hemos utilizado la definición del símbolo de permutación (1.66). Análogamente podemos expresar el producto vectorial $(\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}})$ como $(\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) = \epsilon_{nlm} c_l d_m \hat{\mathbf{e}}_n$, por lo tanto:

$$\begin{aligned} (\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) &= (\epsilon_{ijk} a_j b_k \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot (\epsilon_{nlm} c_l d_m \hat{\mathbf{e}}_n) \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{nlm} a_j b_k c_l d_m \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_n \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{nlm} a_j b_k c_l d_m \delta_{in} \\ &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \epsilon_{jki} \epsilon_{lmi}$ (relación (1.58)) y aplicando la relación (1.63) (i.e.: $\epsilon_{jki} \epsilon_{lmi} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} = \epsilon_{jki} \epsilon_{ilm}$), concluimos que:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} a_j b_k c_l d_m = (\delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl}) a_j b_k c_l d_m = a_l b_m c_l d_m - a_m b_l c_l d_m$$

Puesto que el subíndice mudo indica el producto escalar: $a_l c_l = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$ y $b_m d_m = (\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}})$, luego:

$$(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \cdot (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{d}}) - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{d}})(\vec{\mathbf{b}} \cdot \vec{\mathbf{c}})$$

Ejemplo 1.9: Probar que: $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}}) = \vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})$

Solución: Expresaremos en notación indicial el segundo miembro de la expresión:

$$\begin{aligned} [\vec{\mathbf{c}}(\vec{\mathbf{d}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{d}}(\vec{\mathbf{c}} \cdot \vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})]_p &= c_p [d_i (\epsilon_{ijk} a_j b_k)] - d_p [c_i (\epsilon_{ijk} a_j b_k)] \\ &\Rightarrow \epsilon_{ijk} a_j b_k c_p d_i - \epsilon_{ijk} a_j b_k c_i d_p \\ &\Rightarrow \epsilon_{ijk} a_j b_k (c_p d_i - c_i d_p) \end{aligned}$$

Si utilizamos la propiedad de la delta de Kronecker:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow \epsilon_{ijk} a_j b_k (\delta_{pm} c_m d_n \delta_{ni} - \delta_{im} c_m d_n \delta_{np}) \\ &\Rightarrow (\epsilon_{ijk} a_j b_k) c_m d_n (\delta_{pm} \delta_{ni} - \delta_{im} \delta_{np}) \end{aligned}$$

y si consideramos (1.63), resulta: $\delta_{pm} \delta_{ni} - \delta_{im} \delta_{np} = \epsilon_{pil} \epsilon_{mnl}$. Reemplazamos en la expresión anterior y obtenemos:

$$\begin{aligned} &\Rightarrow (\epsilon_{ijk} a_j b_k) c_m d_n (\epsilon_{pil} \epsilon_{mnl}) \\ &\Rightarrow \epsilon_{pil} [(\epsilon_{ijk} a_j b_k) (\epsilon_{mnl} c_m d_n)] \end{aligned}$$

Dado que las componentes de $(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}})$ son $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ y las componentes de $(\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}})$ son $\epsilon_{mnl} c_m d_n$, obtenemos que:

$$\epsilon_{pil} [(\epsilon_{ijk} a_j b_k) (\epsilon_{mnl} c_m d_n)] = [(\vec{\mathbf{a}} \wedge \vec{\mathbf{b}}) \wedge (\vec{\mathbf{c}} \wedge \vec{\mathbf{d}})]_p$$

Ejemplo 1.10: Si $\vec{\mathbf{a}}$, $\vec{\mathbf{b}}$, $\vec{\mathbf{c}}$ y $\vec{\mathbf{v}}$ son vectores y que se cumple que:

$$\vec{\mathbf{v}} = \alpha \vec{\mathbf{a}} + \beta \vec{\mathbf{b}} + \gamma \vec{\mathbf{c}}$$

Probar que los escalares α , β , γ son dados por:

$$\alpha = \frac{\epsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\epsilon_{pqr} a_p b_q c_r} ; \quad \beta = \frac{\epsilon_{ijk} a_i v_j c_k}{\epsilon_{pqr} a_p b_q c_r} ; \quad \gamma = \frac{\epsilon_{ijk} a_i b_j v_k}{\epsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$$

Solución:

Las componentes del vector $\vec{\mathbf{v}}$ vienen dadas por:

$$v_1 = \alpha a_1 + \beta b_1 + \gamma c_1$$

$$v_2 = \alpha a_2 + \beta b_2 + \gamma c_2$$

$$v_3 = \alpha a_3 + \beta b_3 + \gamma c_3$$

Podemos expresar α como:

$$\alpha = \frac{\begin{vmatrix} v_1 & b_1 & c_1 \\ v_2 & b_2 & c_2 \\ v_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}} = \frac{\epsilon_{ijk} v_i b_j c_k}{\epsilon_{pqr} a_p b_q c_r}$$

Análogamente se puede obtener los parámetros β , γ .

Ejemplo 1.11: Probar la relación (1.37):

$$\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \vec{\mathbf{c}}$$

Solución: Representando el producto vectorial $(\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}})_i = \epsilon_{ijk} b_j c_k$, luego:

$$\begin{aligned} \left[\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \right]_r &= \epsilon_{rsi} a_s (\epsilon_{ijk} b_j c_k) \\ &= \epsilon_{rsi} \epsilon_{ijk} a_s b_j c_k = \epsilon_{rsi} \epsilon_{jki} a_s b_j c_k \\ &= (\delta_{rj} \delta_{sk} - \delta_{rk} \delta_{sj}) a_s b_j c_k \\ &= \delta_{ij} \delta_{sk} a_s b_j c_k - \delta_{rk} \delta_{sj} a_s b_j c_k \\ &= a_k b_r c_k - a_j b_j c_r \\ &= b_r (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - c_r (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \end{aligned}$$

luego

$$\left[\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) \right]_r = \left[\vec{\mathbf{b}} (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) - \vec{\mathbf{c}} (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \right]_r$$

1.5 Tensores de Orden Superior

1.5.1 Diádicas

El producto diádico de dos vectores (producto tensorial) resultará ser un tensor de segundo orden. Si consideramos los vectores \vec{v} y \vec{u} , el producto diádico vendrá representado por:

$$\vec{u}\vec{v} \equiv \vec{u} \otimes \vec{v} = \mathbf{A} \quad (1.71)$$

donde el operador \otimes denota el *producto tensorial*.

El producto diádico obedece a las siguientes leyes:

$$1. \quad (\vec{u} \otimes \vec{v}) \cdot \vec{x} = \vec{u}(\vec{v} \cdot \vec{x}) \equiv \vec{u} \otimes (\vec{v} \cdot \vec{x}) \quad (1.72)$$

$$2. \quad \vec{u} \otimes (\alpha\vec{v} + \beta\vec{w}) = \alpha\vec{u} \otimes \vec{v} + \beta\vec{u} \otimes \vec{w} \quad (1.73)$$

$$3. \quad (\alpha\vec{v} \otimes \vec{u} + \beta\vec{w} \otimes \vec{r}) \cdot \vec{x} = \alpha(\vec{v} \otimes \vec{u}) \cdot \vec{x} + \beta(\vec{w} \otimes \vec{r}) \cdot \vec{x} \\ = \alpha[\vec{v} \otimes (\vec{u} \cdot \vec{x})] + \beta[\vec{w} \otimes (\vec{r} \cdot \vec{x})] \quad (1.74)$$

donde α y β son escalares. Por definición, la diádica no posee la propiedad conmutativa, es decir, $\vec{u} \otimes \vec{v} \neq \vec{v} \otimes \vec{u}$.

La expresión (1.71) también la podemos expresar en el sistema cartesiano como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} = \vec{u} \otimes \vec{v} &= (u_i \hat{e}_i) \otimes (v_j \hat{e}_j) \\ &= u_i v_j (\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j) \quad (i, j = 1, 2, 3) \\ &= A_{ij} (\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j) \end{aligned} \quad (1.75)$$

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{A}}_{\text{Tensor}} = \underbrace{A_{ij}}_{\text{componentes}} \underbrace{\hat{e}_i \otimes \hat{e}_j}_{\text{base}}} \quad (i, j = 1, 2, 3) \quad (1.76)$$

Las componentes de un tensor de segundo orden serán representadas de diferentes formas en el desarrollo de este libro:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \vec{u} \otimes \vec{v} \\ &\downarrow \\ &\text{componentes} \\ &\downarrow \\ (\mathbf{A})_{ij} &= (\vec{u} \otimes \vec{v})_{ij} = u_i v_j = A_{ij} \end{aligned} \quad (1.77)$$

Dichas componentes pueden estar explícitamente expresadas de forma matricial:

$$(\mathbf{A})_{ij} = A_{ij} = \mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.78)$$

A continuación exponemos la representación de tensores de diferentes órdenes, dos, tres y cuatro, en el sistema cartesiano:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{U} &= U_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \\
 \mathbf{T} &= T_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \quad (i, j, k, l = 1, 2, 3) \\
 \mathbb{I} &= I_{ijkl} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l
 \end{aligned} \tag{1.79}$$

OBS.: El orden de un tensor viene dado por el número de subíndices libres en sus componentes.

OBS.: El número de componentes de un tensor viene dado por el máximo valor del rango del subíndice, elevado al número de subíndices libres.

Ejemplo 1.12: ¿Cuál es el orden de los tensores representados por sus componentes: v_i , Φ_{ijk} , F_{ijj} , ε_{ij} , \mathbb{C}_{ijkl} , σ_{ij} ? Determinar cuantas componentes independientes tiene el tensor \mathbb{C} .

Solución: El orden del tensor viene dado por el número de subíndices libres, luego:

Tensores de orden uno: \vec{v} , \vec{F}

Tensores de segundo orden: $\boldsymbol{\varepsilon}$, $\boldsymbol{\sigma}$

Tensor de tercer orden: Φ

Tensor de cuarto orden: \mathbb{C}

El número de componentes de un tensor viene dado por el máximo valor del rango del subíndice, 3 si $(i=1,2,3)$, elevado al número de subíndices libres. Es decir, para el tensor de cuarto orden, el número de índices libres es 4, luego:

$$3^4 = (i=3) \times (j=3) \times (k=3) \times (l=3) = 81$$

El tensor de cuarto orden \mathbb{C}_{ijkl} tiene 81 componentes independientes.

1.5.2 Operaciones con Tensores

Dados dos tensores de segundo orden \mathbf{A} y \mathbf{B} , a continuación definimos algunas operaciones entre ellos:

▪ Suma

La suma de dos tensores del mismo orden resulta ser un tercer tensor de igual orden:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A} \tag{1.80}$$

Las componentes del tensor resultante (\mathbf{C}) viene representadas por:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{C})_{ij} &= (\mathbf{A} + \mathbf{B})_{ij} \\
 C_{ij} &= A_{ij} + B_{ij}
 \end{aligned} \tag{1.81}$$

que de forma matricial expresamos como:

$$\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B} \tag{1.82}$$

▪ Multiplicación de un tensor por un escalar

La multiplicación de un tensor de segundo orden (\mathbf{A}) por un escalar (λ) viene definido por un tensor \mathbf{D} , tal que:

$$\mathbf{D} = \lambda \mathbf{A} \xrightarrow{\text{en componentes}} (\mathbf{D})_{ij} = \lambda (\mathbf{A})_{ij} \quad (1.83)$$

en forma matricial:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \longrightarrow \lambda \mathcal{A} = \begin{bmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \lambda A_{13} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \lambda A_{23} \\ \lambda A_{31} & \lambda A_{32} & \lambda A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.84)$$

También se cumple:

$$(\lambda \mathbf{A}) \cdot \vec{\mathbf{v}} = \lambda (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{v}}) \quad (1.85)$$

para cualquier vector $\vec{\mathbf{v}}$.

▪ Producto Escalar

El producto escalar de un tensor de segundo orden \mathbf{A} por un vector $\vec{\mathbf{x}}$ (tensor de orden uno) resulta ser otro vector $\vec{\mathbf{y}}$ (tensor de orden uno):

$$\begin{aligned} \vec{\mathbf{y}} &= \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{x}} \\ &= (\mathbf{A}_{jk} \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot (\underbrace{x_l \hat{\mathbf{e}}_l}_{\delta_{kl}}) \\ &= \mathbf{A}_{jk} x_l \delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= \underbrace{\mathbf{A}_{jk} x_k}_{y_j} \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= y_j \hat{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \quad (1.86)$$

El producto escalar de dos tensores de segundo orden \mathbf{A} y \mathbf{B} es otro tensor de segundo orden, verificándose que $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{C} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= (\mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (\mathbf{B}_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\ &= \mathbf{A}_{ij} \mathbf{B}_{kl} \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= \underbrace{\mathbf{A}_{ik} \mathbf{B}_{kl}}_{\mathcal{AB}} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= \mathbf{C}_{il} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ \mathbf{D} = \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} &= (\mathbf{B}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (\mathbf{A}_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\ &= \mathbf{B}_{ij} \mathbf{A}_{kl} \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= \underbrace{\mathbf{B}_{ik} \mathbf{A}_{kl}}_{\mathcal{BA}} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= \mathbf{D}_{il} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \end{aligned} \quad (1.87)$$

También se cumplen las siguientes propiedades:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} + \mathbf{C}) &= \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} + \mathbf{A} \cdot \mathbf{C} \\ \mathbf{A} \cdot (\mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) &= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) \cdot \mathbf{C} \end{aligned} \quad (1.88)$$

▪ Potencia de Tensores

El producto escalar (contracción simple) nos permite definir la potencia de tensores de segundo orden, luego:

$$\mathbf{A}^0 = \mathbf{1} \quad ; \quad \mathbf{A}^1 = \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbf{A}^2 = \mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \quad (1.89)$$

donde $\mathbf{1}$ es el tensor identidad de segundo orden.

▪ Doble Producto Escalar

Consideremos dos diádicas, $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}}$ y $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}$, el doble producto escalar (doble contracción) podrá ser definido de distintas formas $\mathbf{A}:\mathbf{B}$ y $\mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}$ tal como se indica a continuación.

Doble contracción (:):

$$\mathbf{A}:\mathbf{B} = (\bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}}):(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{u}})(\bar{\mathbf{d}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) \quad (1.90)$$

Según la definición del doble producto escalar, podemos demostrar que es conmutativo:

$$\mathbf{B}:\mathbf{A} = (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}):(\bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{c}})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{d}}) = (\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{u}})(\bar{\mathbf{d}} \cdot \bar{\mathbf{v}}) = \mathbf{A}:\mathbf{B} \quad (1.91)$$

En componentes:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}:\mathbf{B} &= (A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) : (B_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\ &= A_{ij} B_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \quad \delta_{jl} \\ &= A_{ij} B_{ij} \\ &= \lambda \quad (\text{escalar}) \end{aligned} \quad (1.92)$$

El doble producto escalar de un tensor de tercer orden (\mathbf{S}) y uno de segundo (\mathbf{B}), resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}:\mathbf{B} &= (\bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{a}}):(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{d}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \bar{\mathbf{c}} \\ \mathbf{B}:\mathbf{S} &= (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}):(\bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}} \otimes \bar{\mathbf{a}}) = (\bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{c}})(\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{d}}) \bar{\mathbf{a}} \end{aligned} \quad (1.93)$$

En notación simbólica la doble contracción de un tensor de tercer orden y un de segundo queda:

$$S_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k : B_{pq} \hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q = S_{ijk} B_{pq} \delta_{jp} \delta_{kq} \hat{\mathbf{e}}_i = S_{ijk} B_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \quad (1.94)$$

Doble contracción ($\cdot\cdot$):

$$(\bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{d}}) \cdot\cdot (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) = (\bar{\mathbf{c}} \cdot \bar{\mathbf{v}})(\bar{\mathbf{d}} \cdot \bar{\mathbf{u}}) \quad (1.95)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B} &= (A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot\cdot (B_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\ &= A_{ij} B_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} \\ &= A_{ij} B_{ji} \\ &= \gamma \quad (\text{escalar}) \end{aligned} \quad (1.96)$$

Observemos que $\mathbf{A}:\mathbf{B} \neq \mathbf{A}\cdot\cdot\mathbf{B}$, excepto cuando al menos uno de los dos tensores es simétrico, en cuyo caso ambos productos serán iguales.

A través del doble producto escalar, podemos obtener las componentes del tensor de segundo orden \mathbf{A} , según el sistema cartesiano, como:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A})_{ij} &= (\mathbf{A}_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) : (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot (\mathbf{A}_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \cdot \hat{\mathbf{e}}_j \\
&= \mathbf{A}_{kl} \delta_{ki} \delta_{lj} \\
&= \mathbf{A}_{ij}
\end{aligned} \tag{1.97}$$

A continuación expresamos algunas propiedades del doble producto escalar:

$$\begin{aligned}
a) \quad & \mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{B} : \mathbf{A} \\
b) \quad & \mathbf{A} : (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} : \mathbf{B} + \mathbf{A} : \mathbf{C} \\
c) \quad & \lambda(\mathbf{A} : \mathbf{B}) = (\lambda \mathbf{A}) : \mathbf{B} = \mathbf{A} : (\lambda \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{1.98}$$

donde $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$ son tensores de segundo orden y λ escalar.

La doble contracción de un tensor de cuarto orden \mathbf{C} con uno de segundo orden $\boldsymbol{\varepsilon}$ queda definido por:

$$\mathbf{C}_{ijkl} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l : \varepsilon_{pq} \hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{pq} \delta_{kp} \delta_{lq} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = \mathbf{C}_{ijkl} \varepsilon_{kl} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \tag{1.99}$$

Resultando ser un tensor de segundo orden. Definimos también la doble contracción entre un tensor de tercer orden (\mathbf{T}) y uno de segundo orden ($\boldsymbol{\varepsilon}$) como:

$$T_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k : \varepsilon_{pq} \hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q = T_{ijk} \varepsilon_{pq} \delta_{jp} \delta_{kq} \hat{\mathbf{e}}_i = T_{ijk} \varepsilon_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \tag{1.100}$$

Consideremos dos vectores cualesquiera $\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}$ y \mathbf{A} un tensor de segundo orden, demostramos que:

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{b}} &= a_p \hat{\mathbf{e}}_p \cdot \mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \cdot b_r \hat{\mathbf{e}}_r \\
&= a_p \mathbf{A}_{ij} b_r \delta_{pi} \delta_{jr} \\
&= a_i \mathbf{A}_{ij} b_j = \mathbf{A}_{ij} (a_i b_j) \\
&= \mathbf{A} : (\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{b}})
\end{aligned} \tag{1.101}$$

▪ Producto Vectorial

El producto vectorial de un tensor de segundo orden \mathbf{A} por un vector $\vec{\mathbf{x}}$ (tensor de orden uno) resulta ser un tensor de segundo orden dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} \wedge \vec{\mathbf{x}} &= (\mathbf{A}_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \wedge (x_k \hat{\mathbf{e}}_k) \\
&= \epsilon_{ijk} \mathbf{A}_{ij} x_k \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l
\end{aligned} \tag{1.102}$$

donde empleamos la definición (1.67), es decir, $\hat{\mathbf{e}}_j \wedge \hat{\mathbf{e}}_k = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_l$. Hemos demostrado en el **Ejemplo 1.11** la siguiente relación $\vec{\mathbf{a}} \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{c}}) = (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{c}}) \vec{\mathbf{b}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}}) \vec{\mathbf{c}}$, que también podemos representar a través de diádicas como:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\mathbf{a}} \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) \right]_j &= (\mathbf{a}_k \mathbf{c}_k) \mathbf{b}_j - (\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k) \mathbf{c}_j = (\mathbf{b}_j \mathbf{c}_k - \mathbf{c}_j \mathbf{b}_k) \mathbf{a}_k \\ &= \left[(\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} \right]_j \end{aligned} \quad (1.103)$$

En el caso particular cuando $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{c}}$ podemos decir que:

$$\begin{aligned} \left[\bar{\mathbf{a}} \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{a}}) \right]_j &= (\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k) \mathbf{b}_j - (\mathbf{a}_k \mathbf{b}_k) \mathbf{a}_j = (\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k) \mathbf{b}_p \delta_{jp} - (\mathbf{a}_k \mathbf{b}_p \delta_{kp}) \mathbf{a}_j \\ &= \left[(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k) \delta_{jp} - (\mathbf{a}_k \delta_{kp}) \mathbf{a}_j \right] \mathbf{b}_p = \left[(\mathbf{a}_k \mathbf{a}_k) \delta_{jp} - \mathbf{a}_p \mathbf{a}_j \right] \mathbf{b}_p \\ &= \left\{ [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \mathbf{1} - \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{a}}] \cdot \bar{\mathbf{b}} \right\}_j \end{aligned} \quad (1.104)$$

Con lo cual podemos decir que las siguientes relaciones son válidas:

$$\boxed{\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) &= (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{c}}) \bar{\mathbf{b}} - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \bar{\mathbf{c}} = (\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{c}} - \bar{\mathbf{c}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{a}} \\ \bar{\mathbf{a}} \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{a}}) &= [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \mathbf{1} - \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{a}}] \cdot \bar{\mathbf{b}} \end{aligned}} \quad (1.105)$$

1.5.2.1 Representación de las Componentes de un Tensor de Segundo Orden

Dado un tensor de segundo orden \mathbf{T} representado en la base cartesiana como:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= T_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{13} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \\ &\quad + T_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{22} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \\ &\quad + T_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{32} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{33} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1.106)$$

Su proyección sobre la base $\hat{\mathbf{e}}_k$ resulta:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k &= T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \delta_{jk} \\ &= T_{ik} \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= T_{1k} \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{2k} \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{3k} \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1.107)$$

Observemos que resultan tres vectores:

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k = T_{ik} \hat{\mathbf{e}}_i \Rightarrow \begin{cases} k=1 & T_{i1} \hat{\mathbf{e}}_i = T_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \\ k=2 & T_{i2} \hat{\mathbf{e}}_i = T_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{22} \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{32} \hat{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_2)} \\ k=3 & T_{i3} \hat{\mathbf{e}}_i = T_{13} \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{33} \hat{\mathbf{e}}_3 = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_3)} \end{cases} \quad (1.108)$$

Denotaremos de *vector tensor* el vector resultante de la proyección de un tensor de segundo orden sobre una dirección. La representación de tres vectores tensores $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_1)}$, $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_2)}$, $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_3)}$, en la base cartesiana, se muestra en la Figura 1.14.

Observemos también que $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{e}}_1)}$ es el vector tensor según la dirección $\hat{\mathbf{e}}_1$ que representamos por el versor $\hat{\mathbf{n}}_i^{(1)} = [1, 0, 0]$ luego:

$$(\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}})_i = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{21} \\ T_{31} \end{bmatrix} = \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{e}}_1)} \quad (1.109)$$

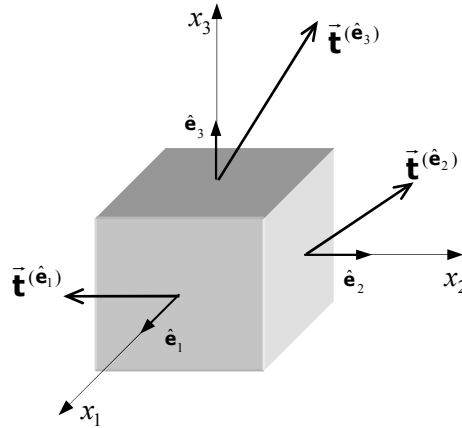


Figura 1.14: Vectores tensores en la base cartesiana.

El mismo resultado podemos obtener simplemente haciendo el producto escalar de \mathbf{T} dado por (1.106) por la base $\hat{\mathbf{e}}_1$, es decir:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 &= [T_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{12} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{13} \hat{\mathbf{e}}_1 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \\ &+ T_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{22} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{23} \hat{\mathbf{e}}_2 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3 + \\ &+ T_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{32} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{33} \hat{\mathbf{e}}_3 \otimes \hat{\mathbf{e}}_3] \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 \\ &= T_{11} \hat{\mathbf{e}}_1 + T_{21} \hat{\mathbf{e}}_2 + T_{31} \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1.110)$$

Luego, podemos representar las componentes de un tensor de segundo orden en la base cartesiana tal y como se indica en la Figura 1.15.

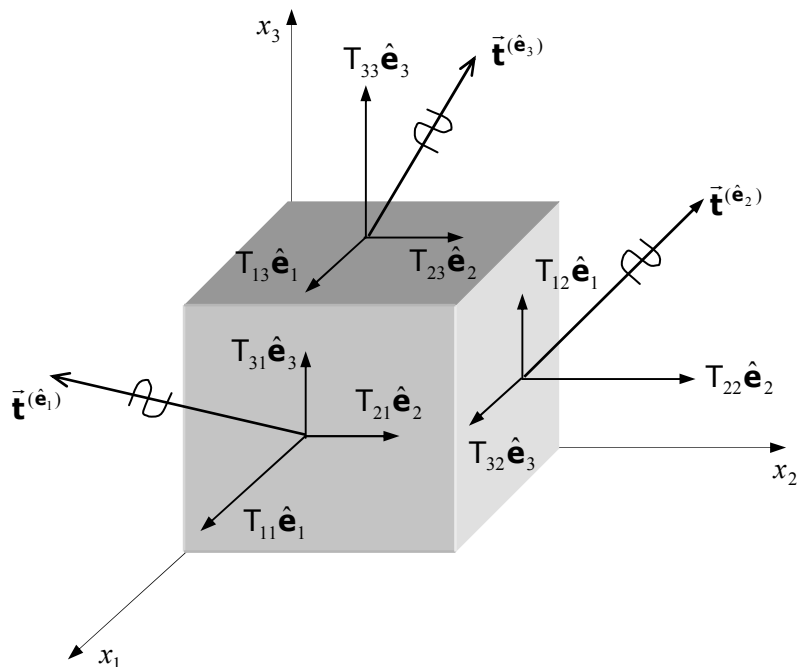


Figura 1.15: Representación de las componentes de un tensor de segundo orden en la base cartesiana.

Las componentes de la diagonal principal, T_{11} , T_{22} , T_{33} , están normales a los planos definidos por los versores $\hat{\mathbf{e}}_1$, $\hat{\mathbf{e}}_2$, $\hat{\mathbf{e}}_3$, respectivamente. Por ello denominamos de *componentes normales*. Las componentes que están tangentes al plano denominamos de *componentes tangenciales*, que corresponden a las componentes que están fuera de la diagonal principal.

1.5.3 Propiedades de los Tensores

1.5.3.1 Transpuesta

Sea un tensor de segundo orden \mathbf{A} , representado por:

$$\mathbf{A} = A_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \quad (1.111)$$

La *transpuesta* del tensor \mathbf{A} definimos como:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= A_{ji} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= A_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i) \end{aligned} \quad (1.112)$$

Si A_{ij} son las componentes de \mathbf{A} , las componentes de la transpuesta de \mathbf{A} serán:

$$(\mathbf{A}^T)_{ij} = A_{ji} \quad (1.113)$$

Si $\mathbf{A} = \bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}$, la transpuesta de \mathbf{A} vendrá dada por $\mathbf{A}^T = \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{u}}$:

$$\begin{aligned} \mathbf{A}^T &= (\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}})^T &&= \bar{\mathbf{v}} \otimes \bar{\mathbf{u}} \\ &= (u_i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes v_j \hat{\mathbf{e}}_j)^T &&= v_j \hat{\mathbf{e}}_j \otimes u_i \hat{\mathbf{e}}_i = v_i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes u_j \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= (u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)^T &&= u_i v_j \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i = u_j v_i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \\ &= (A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)^T &&= A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i = A_{ji} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \end{aligned} \quad (1.114)$$

Sean \mathbf{A} , \mathbf{B} dos tensores y α , β escalares, las siguientes relaciones son válidas:

$$(\mathbf{A}^T)^T = \mathbf{A}$$

$$(\alpha \mathbf{B} + \beta \mathbf{A})^T = \alpha \mathbf{B}^T + \beta \mathbf{A}^T \quad (1.115)$$

$$(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T$$

La transpuesta de la matriz que contienen las componentes del tensor, se forma al cambiar filas por columna y viceversa, es decir:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{transpuesta}} \mathcal{A}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} \quad (1.116)$$

También son válidas las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:\mathbf{B}^T &= (\mathbf{A}_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j):(\mathbf{B}_{kl}\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{kl}\delta_{il}\delta_{jk} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ji} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \\ \mathbf{A}^T:\mathbf{B} &= (\mathbf{A}_{ij}\hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i):(\mathbf{B}_{kl}\hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{kl}\delta_{jk}\delta_{il} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ji} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\end{aligned}\quad (1.117)$$

Ejemplo 1.13: Demostrar que la siguiente propiedad es válida:

$$\mathbf{A}:(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) = (\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}):\mathbf{C} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^T):\mathbf{B}$$

donde \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} son tensores de segundo cualesquiera.

Solución: Demostraremos esta identidad a través de sus componentes:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}:(\mathbf{B}\cdot\mathbf{C}) &= \mathbf{A}_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j : (\mathbf{B}_{lk}\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \mathbf{e}_k \cdot \mathbf{C}_{pq}\hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q) \\ &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{lk}\mathbf{C}_{pq}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j : (\delta_{kp}\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_q) \\ &= \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{lk}\mathbf{C}_{pq}\delta_{kp}\delta_{il}\delta_{jq} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ik}\mathbf{C}_{kj}\end{aligned}$$

Observemos que cuando trabajamos en notación indicial el orden no importa, es decir:

$$\mathbf{A}_{ij}\mathbf{B}_{ik}\mathbf{C}_{kj} = \mathbf{B}_{ik}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{C}_{kj} = \mathbf{A}_{ij}\mathbf{C}_{kj}\mathbf{B}_{ik}$$

Podemos ahora observar que la operación $\mathbf{B}_{ik}\mathbf{A}_{ij}$ resultará un tensor de segundo orden cuyas componentes son $(\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A})_{kj}$ luego, $\mathbf{B}_{ik}\mathbf{A}_{ij}\mathbf{C}_{kj} = (\mathbf{B}^T\cdot\mathbf{A}):\mathbf{C}$.

Análogamente podemos decir que $\mathbf{A}_{ij}\mathbf{C}_{kj}\mathbf{B}_{ik} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}^T):\mathbf{B}$.

Ejemplo 1.14: Demostrar que, si $\vec{\mathbf{u}}$, $\vec{\mathbf{v}}$ son vectores y \mathbf{A} un tensor de segundo orden, la siguiente relación es válida:

$$\vec{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}^T\cdot\vec{\mathbf{v}} = \vec{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{A}\cdot\vec{\mathbf{u}}$$

Solución:

$$\begin{aligned}\vec{\mathbf{u}}\cdot\mathbf{A}^T\cdot\vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{v}}\cdot\mathbf{A}\cdot\vec{\mathbf{u}} \\ u_i\hat{\mathbf{e}}_i\cdot\mathbf{A}_{jl}\hat{\mathbf{e}}_l\otimes\hat{\mathbf{e}}_j\cdot\mathbf{v}_k\hat{\mathbf{e}}_k &= \mathbf{v}_k\hat{\mathbf{e}}_k\cdot\mathbf{A}_{jl}\hat{\mathbf{e}}_j\otimes\hat{\mathbf{e}}_l\cdot u_i\hat{\mathbf{e}}_i \\ u_i\mathbf{A}_{jl}\delta_{il}\mathbf{v}_k\delta_{jk} &= \mathbf{v}_k\delta_{kj}\mathbf{A}_{jl}u_i\delta_{il} \\ u_l\mathbf{A}_{jl}\mathbf{v}_j &= \mathbf{v}_j\mathbf{A}_{jl}u_l\end{aligned}$$

1.5.3.2 Simetría y Antisimetría

1.5.3.2.1 Tensor Simétrico

Un tensor de segundo orden \mathbf{A} es simétrico, *i.e.*: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{sym}$, si el tensor es igual a su transpuesta:

$$\mathbf{A} = \mathbf{A}^T \xrightarrow{\text{en componentes}} \mathbf{A}_{ij} = \mathbf{A}_{ji} \quad (1.118)$$

En forma de matriz:

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^T \longrightarrow \mathcal{A}^{sym} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} & \mathbf{A}_{23} \\ \mathbf{A}_{13} & \mathbf{A}_{23} & \mathbf{A}_{33} \end{bmatrix} \quad (1.119)$$

Podemos notar claramente que un tensor simétrico de segundo orden tiene 6 componentes independientes: \mathbf{A}_{11} , \mathbf{A}_{22} , \mathbf{A}_{33} , \mathbf{A}_{12} , \mathbf{A}_{23} , \mathbf{A}_{13} .

Según ecuación (1.118) un tensor simétrico se puede representar por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_{ji} \\
\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji} \\
2\mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji} \\
\mathbf{A}_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)
\end{aligned} \tag{1.120}$$

Un tensor de cuarto orden \mathbf{C} , cuyas componentes son \mathbf{C}_{ijkl} , puede presentar:

Simetría menor:

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{jikl} = \mathbf{C}_{ijlk} = \mathbf{C}_{jilk} \tag{1.121}$$

Simetría mayor:

$$\mathbf{C}_{ijkl} = \mathbf{C}_{klij} \tag{1.122}$$

Luego, un tensor de cuarto orden es simétrico si presenta simetría menor y mayor. Un tensor de cuarto orden no simétrico presenta 81 componentes independientes. Si presenta sólo simetría menor, es decir, simetría en $ij = ji(6)$ y simetría en $kl = lk(6)$, quedando el tensor con 36 componentes independientes. Si además de simetría menor el tensor presenta también simetría mayor, el tensor presenta 21 componentes independientes.

1.5.3.2 Tensor Antisimétrico

Un tensor \mathbf{A} será antisimétrico, *i.e.*: $\mathbf{A} \equiv \mathbf{A}^{anti}$, si:

$$\mathbf{A} = -\mathbf{A}^T \xrightarrow{\text{en componentes}} \mathbf{A}_{ij} = -\mathbf{A}_{ji} \tag{1.123}$$

o aún:

$$\mathcal{A} = -\mathcal{A}^T \longrightarrow \mathcal{A}^{anti} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{13} \\ -\mathbf{A}_{12} & 0 & \mathbf{A}_{23} \\ -\mathbf{A}_{13} & -\mathbf{A}_{23} & 0 \end{bmatrix} \tag{1.124}$$

Observemos que un tensor antisimétrico de segundo orden tiene 3 componentes independientes: \mathbf{A}_{12} , \mathbf{A}_{23} , \mathbf{A}_{13} .

Según la condición (1.123) un tensor antisimétrico viene dado por:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{A}_{ji} \\
2\mathbf{A}_{ij} &= \mathbf{A}_{ij} - \mathbf{A}_{ji} \\
\mathbf{A}_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{A}_{ji}) \quad \Rightarrow \quad \mathbf{A} = \frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)
\end{aligned} \tag{1.125}$$

Sea \mathbf{W} un tensor antisimétrico luego, debe cumplir la relación (1.125):

$$\begin{aligned}
\mathbf{W}_{ij} &= \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{ij} - \mathbf{W}_{ji}) = \frac{1}{2}(\mathbf{W}_{kl}\delta_{ik}\delta_{jl} - \mathbf{W}_{kl}\delta_{jk}\delta_{il}) \\
&= \frac{1}{2}\mathbf{W}_{kl}(\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il})
\end{aligned} \tag{1.126}$$

Utilizando la relación entre la delta de Kronecker y el operador de permutación dada por (1.63) obtenemos que $\delta_{ik}\delta_{jl} - \delta_{jk}\delta_{il} = -\epsilon_{ijr}\epsilon_{lkr}$ y reemplazando en la expresión (1.126) resulta:

$$\mathbf{W}_{ij} = -\frac{1}{2}\mathbf{W}_{kl}\epsilon_{ijr}\epsilon_{lkr} \quad (1.127)$$

Desarrollando el término $\mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr}$ para los índices mudos k, l sólo quedamos con los términos:

$$\mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr} = \mathbf{W}_{12}\epsilon_{21r} + \mathbf{W}_{13}\epsilon_{31r} + \mathbf{W}_{21}\epsilon_{12r} + \mathbf{W}_{23}\epsilon_{32r} + \mathbf{W}_{31}\epsilon_{13r} + \mathbf{W}_{32}\epsilon_{23r} \quad (1.128)$$

con lo que concluimos que:

$$\left. \begin{array}{l} r=1 \Rightarrow \mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr} = -\mathbf{W}_{23} + \mathbf{W}_{32} = -2\mathbf{W}_{23} = 2w_1 \\ r=2 \Rightarrow \mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr} = \mathbf{W}_{13} - \mathbf{W}_{31} = 2\mathbf{W}_{13} = 2w_2 \\ r=3 \Rightarrow \mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr} = -\mathbf{W}_{12} + \mathbf{W}_{21} = -2\mathbf{W}_{12} = 2w_3 \end{array} \right\} \Rightarrow \mathbf{W}_{kl}\epsilon_{lkr} = 2w_r \quad (1.129)$$

donde hemos hecho el siguiente cambio de variables:

$$\mathbf{W}_{ij} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{13} \\ \mathbf{W}_{21} & 0 & \mathbf{W}_{23} \\ \mathbf{W}_{31} & \mathbf{W}_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & \mathbf{W}_{12} & \mathbf{W}_{13} \\ -\mathbf{W}_{12} & 0 & \mathbf{W}_{23} \\ -\mathbf{W}_{13} & -\mathbf{W}_{23} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix} \quad (1.130)$$

Definimos así el vector axial \vec{w} correspondiente al tensor antisimétrico \mathbf{W} . Reemplazando (1.129) en (1.127) y considerando que $\epsilon_{ijr} = \epsilon_{rij}$ obtenemos que:

$$\boxed{\mathbf{W}_{ij} = -w_r\epsilon_{rij}} \quad (1.131)$$

donde \vec{w} es la representación vectorial del tensor antisimétrico \mathbf{W} . Y el módulo de \vec{w} viene dado por:

$$\omega^2 = \|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = w_1^2 + w_2^2 + w_3^2 = \mathbf{W}_{23}^2 + \mathbf{W}_{13}^2 + \mathbf{W}_{12}^2 \quad (1.132)$$

Partiendo de la expresión (1.131) y multiplicando los dos miembros por ϵ_{kij} obtenemos que:

$$\begin{aligned} \epsilon_{kij}\mathbf{W}_{ij} &= -w_r\epsilon_{rij}\epsilon_{kij} \\ &= -2w_r\delta_{rk} = -2w_k \end{aligned} \quad (1.133)$$

donde aplicamos la relación $\epsilon_{rij}\epsilon_{kij} = 2\delta_{rk}$ obtenida en el **Ejemplo 1.7**, con lo que concluimos que:

$$\boxed{w_k = -\frac{1}{2}\epsilon_{kij}\mathbf{W}_{ij}} \quad (1.134)$$

La representación de las componentes del tensor antisimétrico en el sistema cartesiano y de su vector axial correspondiente se puede apreciar en la Figura 1.16.

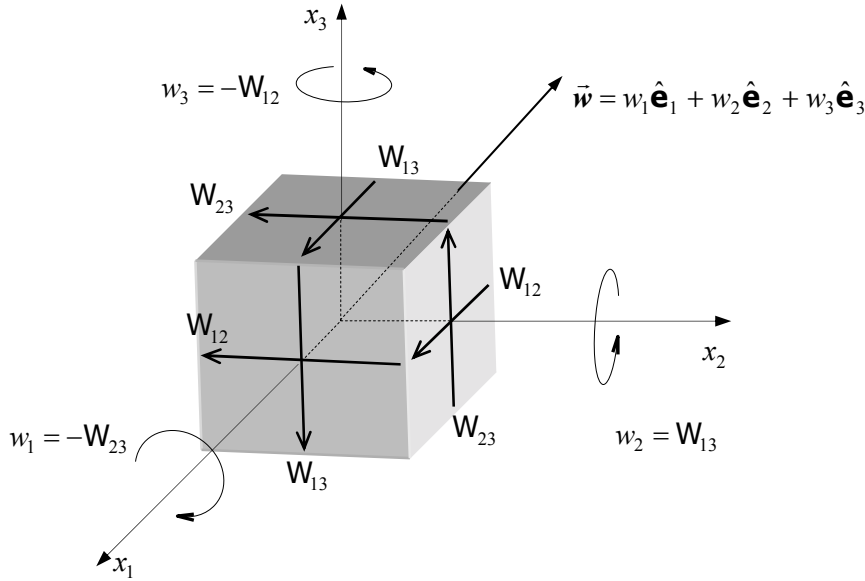


Figura 1.16: Componentes de un tensor antisimétrico.

Sean $\vec{\mathbf{a}}$ y $\vec{\mathbf{b}}$ vectores arbitrarios y \mathbf{W} un tensor antisimétrico, entonces se cumple que:

$$\vec{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{W}^T \cdot \vec{\mathbf{b}} = -\vec{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{b}} \quad (1.135)$$

luego si $\vec{\mathbf{a}} = \vec{\mathbf{b}}$ resulta que:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{a}} = \mathbf{W} : (\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{a}}) = 0 \quad (1.136)$$

Observar que $(\vec{\mathbf{a}} \otimes \vec{\mathbf{a}})$ resulta un tensor de segundo orden simétrico, con lo que concluimos que el doble producto de un tensor simétrico y un tensor antisimétrico resulta ser cero.

Sean \mathbf{W} un tensor antisimétrico y $\vec{\mathbf{a}}$ un vector arbitrario, las componentes del producto escalar $\mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{a}}$ vienen dadas por:

$$\begin{aligned} W_{ij} a_j &= W_{i1} a_1 + W_{i2} a_2 + W_{i3} a_3 \\ i=1 &\Rightarrow W_{11} a_1 + W_{12} a_2 + W_{13} a_3 \\ i=2 &\Rightarrow W_{21} a_1 + W_{22} a_2 + W_{23} a_3 \\ i=3 &\Rightarrow W_{31} a_1 + W_{32} a_2 + W_{33} a_3 \end{aligned} \quad (1.137)$$

Considerando la propiedad del tensor antisimétrico, *i.e.*, $W_{11} = 0$, $W_{22} = 0$, $W_{33} = 0$, el producto escalar (1.137) resulta:

$$(\mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{a}})_i \Rightarrow \begin{cases} i=1 \Rightarrow W_{12} a_2 + W_{13} a_3 \\ i=2 \Rightarrow W_{21} a_1 + W_{23} a_3 \\ i=3 \Rightarrow W_{31} a_1 + W_{32} a_2 \end{cases} \quad (1.138)$$

Fijemos que las componentes anteriores son las mismas que resultan de la operación:

$$\begin{aligned}\bar{\mathbf{w}} \wedge \bar{\mathbf{a}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ w_1 & w_2 & w_3 \\ \mathbf{a}_1 & \mathbf{a}_2 & \mathbf{a}_3 \end{vmatrix} \\ &= (-w_3 \mathbf{a}_2 + w_2 \mathbf{a}_3) \hat{\mathbf{e}}_1 + (w_3 \mathbf{a}_1 - w_1 \mathbf{a}_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (-w_2 \mathbf{a}_1 + w_1 \mathbf{a}_2) \hat{\mathbf{e}}_3 \\ &= (W_{12} \mathbf{a}_2 + W_{13} \mathbf{a}_3) \hat{\mathbf{e}}_1 + (W_{21} \mathbf{a}_1 + W_{23} \mathbf{a}_3) \hat{\mathbf{e}}_2 + (W_{31} \mathbf{a}_1 + W_{32} \mathbf{a}_2) \hat{\mathbf{e}}_3\end{aligned}\quad (1.139)$$

donde se cumple que $-w_1 = W_{23} = -W_{32}$, $w_2 = W_{13} = -W_{31}$, $-w_3 = W_{12} = -W_{21}$. Luego, dado un tensor antisimétrico \mathbf{W} , y el vector axil $\bar{\mathbf{w}}$ correspondiente a \mathbf{W} se cumple que:

$$\boxed{\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{w}} \wedge \bar{\mathbf{a}}}\quad (1.140)$$

para todo vector $\bar{\mathbf{a}}$. Además si $\bar{\mathbf{w}}$ correspondiente a \mathbf{W} , podemos representar el vector $\bar{\mathbf{w}}$ por su módulo, $\|\bar{\mathbf{w}}\| = \omega$, y por un versor según la dirección de $\bar{\mathbf{w}}$ como $\bar{\mathbf{w}} = \omega \hat{\mathbf{e}}_1^*$, luego la expresión (1.140) puede aun ser expresada por:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{a}} &= \bar{\mathbf{w}} \wedge \bar{\mathbf{a}} \\ &= \omega \hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \bar{\mathbf{a}}\end{aligned}\quad (1.141)$$

Además escogemos dos versores $\hat{\mathbf{e}}_2^*$, $\hat{\mathbf{e}}_3^*$ que constituyan una base ortonormal con $\hat{\mathbf{e}}_1^*$, ver Figura 1.17, tal que:

$$\hat{\mathbf{e}}_1^* = \hat{\mathbf{e}}_2^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_3^* \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_2^* = \hat{\mathbf{e}}_3^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_1^* \quad ; \quad \hat{\mathbf{e}}_3^* = \hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_2^* \quad (1.142)$$

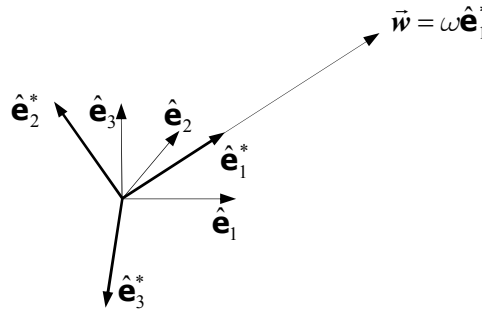


Figura 1.17: bases ortonormales.

Pudiendo así representar el vector $\bar{\mathbf{a}}$ en esta nueva base como $\bar{\mathbf{a}} = a_1^* \hat{\mathbf{e}}_1^* + a_2^* \hat{\mathbf{e}}_2^* + a_3^* \hat{\mathbf{e}}_3^*$, luego:

$$\begin{aligned}\mathbf{W} \cdot \bar{\mathbf{a}} &= \omega \hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \bar{\mathbf{a}} \\ &= \omega \hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge (a_1^* \hat{\mathbf{e}}_1^* + a_2^* \hat{\mathbf{e}}_2^* + a_3^* \hat{\mathbf{e}}_3^*) \\ &= \omega (a_1^* \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_1^*}_{=\hat{\mathbf{0}}} + a_2^* \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_2^*}_{=\hat{\mathbf{e}}_3^*} + a_3^* \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_1^* \wedge \hat{\mathbf{e}}_3^*}_{=-\hat{\mathbf{e}}_2^*}) \\ &= \omega (a_2^* \hat{\mathbf{e}}_3^* - a_3^* \hat{\mathbf{e}}_2^*) \\ &= [\omega (\hat{\mathbf{e}}_3^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_2^* - \hat{\mathbf{e}}_2^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_3^*)] \cdot \bar{\mathbf{a}}\end{aligned}\quad (1.143)$$

Con lo cual podemos representar un tensor antisimétrico como:

$$\mathbf{W} = \omega(\hat{\mathbf{e}}_3^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_2^* - \hat{\mathbf{e}}_2^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_3^*) \quad (1.144)$$

Aprovechando la representación del tensor antisimétrico (1.144), podemos obtener la proyección del tensor \mathbf{W} según las direcciones $\hat{\mathbf{e}}_1^*$, $\hat{\mathbf{e}}_2^*$, $\hat{\mathbf{e}}_3^*$:

$$\mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{e}}_1^* = \bar{\mathbf{0}} \quad ; \quad \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2^* = \omega \hat{\mathbf{e}}_3^* \quad ; \quad \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{e}}_3^* = -\omega \hat{\mathbf{e}}_2^* \quad (1.145)$$

También podemos verificar que se cumple lo siguiente:

$$\hat{\mathbf{e}}_3^* \cdot \mathbf{W} \cdot \hat{\mathbf{e}}_2^* = \hat{\mathbf{e}}_3^* \cdot [\omega(\hat{\mathbf{e}}_3^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_2^* - \hat{\mathbf{e}}_2^* \otimes \hat{\mathbf{e}}_3^*)] \cdot \hat{\mathbf{e}}_2^* = \omega \quad (1.146)$$

Luego, en este nuevo espacio podemos representar las componentes del tensor \mathbf{W} como:

$$\mathbf{W}_{ij}^* = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega \\ 0 & \omega & 0 \end{bmatrix} \quad (1.147)$$

En la Figura 1.18 podemos apreciar dichas componentes. Observemos también que, cuales otros dos versores (normales entre si) definidos en el plano $\hat{\mathbf{e}}_2^* - \hat{\mathbf{e}}_3^*$ nos proporcionarán las mismas componentes que (1.147).

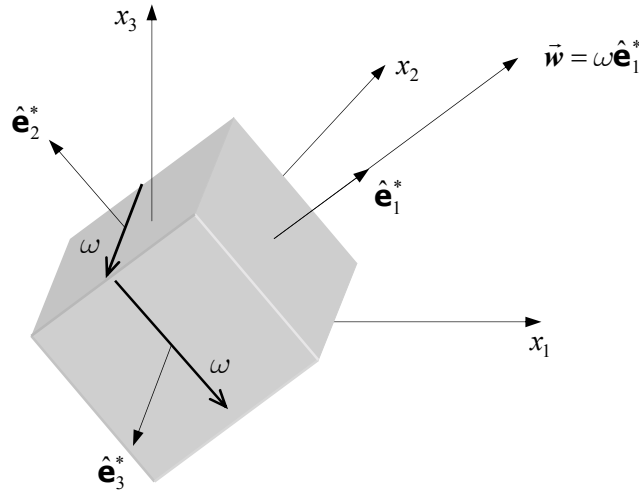


Figura 1.18: Componentes del tensor antisimétrico en el espacio definido por el vector axial.

1.5.3.2.3 Descomposición Aditiva de Tensores en una Parte Simétrica y Antisimétrica

Cualquier tensor puede ser descompuesto (de forma adicional) en una parte simétrica \mathbf{A}^{sym} y en otra antisimétrica \mathbf{A}^{anti} :

$$\mathbf{A} = \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} + \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{A}^{sym}} + \underbrace{\frac{1}{2}(\mathbf{A} - \mathbf{A}^T)}_{\mathbf{A}^{anti}} = \mathbf{A}^{sym} + \mathbf{A}^{anti} \quad (1.148)$$

en componentes:

$$\mathbf{A}_{ij}^{sym} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{ij} + \mathbf{A}_{ji}) \quad y \quad \mathbf{A}_{ij}^{anti} = \frac{1}{2}(\mathbf{A}_{ij} - \mathbf{A}_{ji}) \quad (1.149)$$

Observemos que, sí \mathbf{A} y \mathbf{B} son tensores de segundo orden cualesquiera, se cumple que:

$$\begin{aligned}
(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^{sym} &= \frac{1}{2} \left[(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) + (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A})^T \right] \\
&= \frac{1}{2} [\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{A} + \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}] \\
&= \mathbf{A}^T \cdot \frac{1}{2} [\mathbf{B} + \mathbf{B}^T] \cdot \mathbf{A} \\
&= \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B}^{sym} \cdot \mathbf{A}
\end{aligned} \tag{1.150}$$

Ejemplo 1.15: Si $\boldsymbol{\sigma}$ es un tensor de segundo orden simétrico y \mathbf{W} es un tensor de segundo orden antisimétrico. Demostrar que $\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} = 0$.

Solución:

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} &= \sigma_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) : W_{lk} (\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \\
&= \sigma_{ij} W_{lk} \delta_{il} \delta_{jk} \\
&= \sigma_{ij} W_{ij} \quad (\text{escalar})
\end{aligned}$$

Desarrollando

$$\begin{aligned}
\sigma_{ij} W_{ij} &= \underbrace{\sigma_{1j} W_{1j}} + \underbrace{\sigma_{2j} W_{2j}} + \underbrace{\sigma_{3j} W_{3j}} \\
&\quad \sigma_{11} W_{11} \quad \sigma_{21} W_{21} \quad \sigma_{31} W_{31} \\
&\quad + \quad + \quad + \\
&\quad \sigma_{12} W_{12} \quad \sigma_{22} W_{22} \quad \sigma_{32} W_{32} \\
&\quad + \quad + \quad + \\
&\quad \sigma_{13} W_{13} \quad \sigma_{23} W_{23} \quad \sigma_{33} W_{33}
\end{aligned}$$

Considerando la propiedad de un tensor simétrico $\sigma_{12} = \sigma_{21}$, $\sigma_{31} = \sigma_{13}$, $\sigma_{32} = \sigma_{23}$ y antisimétrico $W_{11} = W_{22} = W_{33} = 0$, $w_{21} = -w_{12}$, $W_{31} = -W_{13}$, $W_{32} = -W_{23}$, resultando:

$$\boldsymbol{\sigma} : \mathbf{W} = 0 \quad c.q.d.$$

Ejemplo 1.16: Demostrar que:

- a) $\vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}^{sym} \cdot \vec{\mathbf{M}}$
b) $\mathbf{A} : \mathbf{B} = \mathbf{A}^{sym} : \mathbf{B}^{sym} + \mathbf{A}^{anti} : \mathbf{B}^{anti}$

donde, $\vec{\mathbf{M}}$ es un vector y \mathbf{Q} , \mathbf{A} , y \mathbf{B} son tensores de segundo orden.

Solución:

a)

$$\begin{aligned}
\vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\mathbf{M}} &= \vec{\mathbf{M}} \cdot (\mathbf{Q}^{sym} + \mathbf{Q}^{anti}) \cdot \vec{\mathbf{M}} \\
&= \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}^{sym} \cdot \vec{\mathbf{M}} + \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}^{anti} \cdot \vec{\mathbf{M}}
\end{aligned}$$

Ya que el producto: $\vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}^{anti} \cdot \vec{\mathbf{M}} = \mathbf{Q}^{anti} : (\vec{\mathbf{M}} \otimes \vec{\mathbf{M}}) = 0$, resulta que:

$$\vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q} \cdot \vec{\mathbf{M}} = \vec{\mathbf{M}} \cdot \mathbf{Q}^{sym} \cdot \vec{\mathbf{M}} \quad c.q.d.$$

b)

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} : \mathbf{B} &= (\mathbf{A}^{sym} + \mathbf{A}^{anti}) : (\mathbf{B}^{sym} + \mathbf{B}^{anti}) \\
&= \mathbf{A}^{sym} : \mathbf{B}^{sym} + \underbrace{\mathbf{A}^{sym} : \mathbf{B}^{anti}}_{=0} + \underbrace{\mathbf{A}^{anti} : \mathbf{B}^{sym}}_{=0} + \mathbf{A}^{anti} : \mathbf{B}^{anti} \\
&= \mathbf{A}^{sym} : \mathbf{B}^{sym} + \mathbf{A}^{anti} : \mathbf{B}^{anti}
\end{aligned}$$

Luego como consecuencia tenemos que:

$$\mathbf{A} : \mathbf{B}^{sym} = \mathbf{A}^{sym} : \mathbf{B}^{sym} \quad ; \quad \mathbf{A} : \mathbf{B}^{anti} = \mathbf{A}^{anti} : \mathbf{B}^{anti} \quad c.q.d.$$

Ejemplo 1.17: ¿La relación $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ es válida siempre? Siendo \mathbf{T} un tensor de segundo orden y $\bar{\mathbf{n}}$ un vector. En el supuesto de que la relación no sea válida, ¿para qué caso particular lo sería?

Solución:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} &= n_i \hat{\mathbf{e}}_i \cdot T_{kl} (\hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) & \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{n}} &= T_{lk} (\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot n_i \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= n_i T_{kl} \delta_{ik} \hat{\mathbf{e}}_l & & \text{y} & & = n_i T_{lk} \delta_{ki} \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= n_k T_{kl} \hat{\mathbf{e}}_l & & & & = n_k T_{lk} \hat{\mathbf{e}}_l \end{aligned}$$

Con lo que comprobamos que $n_k T_{kl} \neq n_k T_{lk}$, luego:

$$\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \neq \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{n}}$$

La relación $\bar{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{n}}$ sólo será válida cuando el tensor \mathbf{T} sea simétrico.

1.5.3.3 Cofactor de un Tensor. Adjunta de un Tensor

Dado un tensor \mathbf{A} , representamos el cofactor de \mathbf{A} como $\text{cof}(\mathbf{A})$. Dados dos vectores $\bar{\mathbf{a}}$ y $\bar{\mathbf{b}}$ existe un único tensor $\text{cof}(\mathbf{A})$ asociado al tensor \mathbf{A} tal que:

$$\text{cof}(\mathbf{A}) \cdot (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) = (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \quad (1.151)$$

Definimos la adjunta de un tensor \mathbf{A} como:

$$\text{adj}(\mathbf{A}) = [\text{cof}(\mathbf{A})]^T \quad (1.152)$$

donde se cumple que:

$$[\text{adj}(\mathbf{A})]^T = \text{adj}(\mathbf{A}^T) \quad (1.153)$$

Las componentes de $\text{cof}(\mathbf{A})$ podemos obtener de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} [\text{cof}(\mathbf{A})]_{it} \epsilon_{tpr} a_p b_r &= \epsilon_{ijk} A_{jp} A_{kr} b_r \\ \Rightarrow [\text{cof}(\mathbf{A})]_{it} \epsilon_{tpr} &= \epsilon_{ijk} A_{jp} A_{kr} \end{aligned} \quad (1.154)$$

Multiplicando ambos lados de la igualdad por ϵ_{qpr} y además considerando que $\epsilon_{tpr} \epsilon_{qpr} = 2\delta_{tq}$, concluimos que:

$$\begin{aligned} [\text{cof}(\mathbf{A})]_{it} \epsilon_{tpr} &= \epsilon_{ijk} A_{jp} A_{kr} \\ \Rightarrow [\text{cof}(\mathbf{A})]_{it} \underbrace{\epsilon_{tpr} \epsilon_{qpr}}_{=2\delta_{tq}} &= \epsilon_{ijk} \epsilon_{qpr} A_{jp} A_{kr} \\ \Rightarrow [\text{cof}(\mathbf{A})]_{iq} &= \frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \epsilon_{qpr} A_{jp} A_{kr} \end{aligned} \quad (1.155)$$

1.5.3.4 Traza de un Tensor

Antes de definir la traza de un tensor de segundo orden definimos la traza de su base:

$$\text{Tr}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) = \hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij} \quad (1.156)$$

Luego la traza de un tensor \mathbf{A} es la suma de las componentes de su diagonal principal:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{A}) &= \text{Tr}(A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= A_{ij} \text{Tr}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= A_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= A_{ij} \delta_{ij} = A_{ii} \\ &= A_{11} + A_{22} + A_{33} \end{aligned} \quad (1.157)$$

Análogamente podemos decir que:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\bar{\mathbf{u}} \otimes \bar{\mathbf{v}}) &= \text{Tr}(u_i \hat{\mathbf{e}}_i \otimes v_j \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= u_i v_j \text{Tr}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= u_i v_j (\hat{\mathbf{e}}_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j) \\ &= u_i v_j \delta_{ij} = u_i v_i \\ &= \bar{\mathbf{u}} \cdot \bar{\mathbf{v}} \end{aligned} \quad (1.158)$$

NOTA: Podemos adelantar que la traza de un tensor es un invariante, es decir, es independiente del sistema de referencia. ■

Dados dos tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} :

- La traza de la transpuesta de un tensor es igual a la traza del tensor:

$$\text{Tr}(\mathbf{A}^T) = \text{Tr}(\mathbf{A}) \quad (1.159)$$

- La traza de la suma de estos dos tensores será la suma de la traza de los tensores:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B}) \quad (1.160)$$

La demostración es muy sencilla bastando expresar en términos de componentes la expresión anterior:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{A} + \mathbf{B}) &= \text{Tr}(\mathbf{A}) + \text{Tr}(\mathbf{B}) \\ [(A_{11} + B_{11}) + (A_{22} + B_{22}) + (A_{33} + B_{33})] &= (A_{11} + A_{22} + A_{33}) + (B_{11} + B_{22} + B_{33}) \end{aligned} \quad (1.161)$$

- La traza del producto escalar será:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= \text{Tr}[(A_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (B_{lm} \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_m)] \\ &= A_{ij} B_{lm} \underbrace{\delta_{jl}}_{\delta_{im}} \text{Tr}[(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_m)] \\ &= A_{ij} B_{li} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{A}) \end{aligned} \quad (1.162)$$

Análogamente podemos obtener:

$$\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \cdot \mathbf{C}) = \text{Tr}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{A}) = \text{Tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = A_{ij} B_{jk} C_{ki} \quad (1.163)$$

Luego, es fácil demostrar que las siguientes relaciones son válidas:

$$\begin{aligned}
\text{Tr}(\mathbf{A}) &= A_{ii} \\
[\text{Tr}(\mathbf{A})]^2 &= \text{Tr}(\mathbf{A})\text{Tr}(\mathbf{A}) = A_{ii}A_{jj} \\
\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) &= \text{Tr}(\mathbf{A}^2) = A_{il}A_{li} \\
\text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) &= \text{Tr}(\mathbf{A}^3) = A_{ij}A_{jk}A_{ki}
\end{aligned} \tag{1.164}$$

Podemos escribir el doble producto escalar en función de la traza:

$$\begin{aligned}
\mathbf{A} : \mathbf{B} &= A_{ij}B_{ij} \\
&= A_{kj}B_{lj}\delta_{ik}\delta_{il} = A_{ik}B_{il}\delta_{jk}\delta_{jl} \\
&= \underbrace{A_{kj}B_{lj}}_{(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)_{kl}} \delta_{kl} = \underbrace{A_{ik}B_{il}}_{(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})_{kl}} \delta_{kl} \\
&= (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T)_{kk} = (\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})_{kk} \\
&= \text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}^T) = \text{Tr}(\mathbf{A}^T \cdot \mathbf{B})
\end{aligned} \tag{1.165}$$

Ejemplo 1.18: Demostrar las siguientes identidades:

$$(\mathbf{T}^m)^T = (\mathbf{T}^T)^m ; \quad \text{Tr}(\mathbf{T}^T)^m = \text{Tr}(\mathbf{T}^m).$$

Solución:

$$(\mathbf{T}^m)^T = (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T} \dots \mathbf{T})^T = \mathbf{T}^T \cdot \mathbf{T}^T \dots \mathbf{T}^T = (\mathbf{T}^T)^m \quad c.q.d.$$

Para la segunda demostración utilizaremos la propiedad de la traza $\text{Tr}(\mathbf{T}^T) = \text{Tr}(\mathbf{T})$
 $\text{Tr}(\mathbf{T}^T)^m = \text{Tr}(\mathbf{T}^m)^T = \text{Tr}(\mathbf{T}^m) \quad c.q.d.$

1.5.3.5 Tensores Particulares

1.5.3.5.1 Tensores Identidad

- Tensor identidad de segundo orden:

$$\mathbf{1} = \delta_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_i = \mathbf{1} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_i \tag{1.166}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz con las componentes del tensor $\mathbf{1}$. δ_{ij} es conocido como el símbolo delta de Kronecker, definido en (1.47):

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \tag{1.167}$$

- Tensores identidades de cuarto orden:

$$\mathbb{I} = \delta_{ik} \delta_{j\ell} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell = \mathbb{I}_{ijkl} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell \tag{1.168}$$

$$\bar{\mathbb{I}} = \delta_{i\ell} \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell = \bar{\mathbb{I}}_{ijkl} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell \tag{1.169}$$

donde que, dado un tensor de segundo orden \mathbf{A} se cumplen que:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{I}:\mathbf{A} &= (\delta_{ik}\delta_{j\ell}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell):(\mathbf{A}_{pq}\hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q) \\
 &= \delta_{ik}\delta_{j\ell}\mathbf{A}_{pq}\delta_{kp}\delta_{\ell q}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \delta_{ik}\delta_{j\ell}\mathbf{A}_{kl}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \mathbf{A}_{ij}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \mathbf{A}
 \end{aligned} \tag{1.170}$$

y

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbb{I}}:\mathbf{A} &= (\delta_{i\ell}\delta_{jk}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell):(\mathbf{A}_{pq}\hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q) \\
 &= \delta_{i\ell}\delta_{jk}\mathbf{A}_{pq}\delta_{kp}\delta_{\ell q}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \delta_{i\ell}\delta_{jk}\mathbf{A}_{kl}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \mathbf{A}_{ji}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
 &= \mathbf{A}^T
 \end{aligned} \tag{1.171}$$

La parte simétrica del tensor de identidad de cuarto orden será:

$$\mathbb{I}^{sym} \equiv \mathbf{I} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}\bar{\otimes}\mathbf{1} + \mathbf{1}\underline{\otimes}\mathbf{1}) \xrightarrow{\text{en componentes}} \mathbb{I}_{ijkl} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{j\ell} + \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \tag{1.172}$$

La propiedad que presenta el producto tensorial $\bar{\otimes}$ se presenta a continuación. Consideremos un tensor de segundo orden simétrico luego cumple que $\mathbf{1} = u_i\hat{\mathbf{e}}_i \otimes u_j\hat{\mathbf{e}}_j = u_i u_j \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = \delta_{ij}\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j$ luego, definimos el producto tensorial $\bar{\otimes}$ como:

$$\mathbf{1}\bar{\otimes}\mathbf{1} = \underbrace{(u_i\hat{\mathbf{e}}_i \otimes u_j\hat{\mathbf{e}}_j)}_{\bar{\otimes}} \underbrace{(u_k\hat{\mathbf{e}}_k \otimes u_\ell\hat{\mathbf{e}}_\ell)}_{\bar{\otimes}} \tag{1.173}$$

$$\mathbf{1}\bar{\otimes}\mathbf{1} = (u_i u_k)(u_j u_\ell)(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell) = \delta_{ik}\delta_{j\ell}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell) \tag{1.174}$$

Y el producto tensorial $\underline{\otimes}$ como:

$$\mathbf{1}\underline{\otimes}\mathbf{1} = \underbrace{(u_i\hat{\mathbf{e}}_i \otimes u_j\hat{\mathbf{e}}_j)}_{\underline{\otimes}} \underbrace{(u_k\hat{\mathbf{e}}_k \otimes u_\ell\hat{\mathbf{e}}_\ell)}_{\underline{\otimes}} \tag{1.175}$$

$$\mathbf{1}\underline{\otimes}\mathbf{1} = (u_i u_\ell)(u_j u_k)(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell) = \delta_{i\ell}\delta_{jk}(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_\ell) \tag{1.176}$$

La parte antisimétrica de \mathbb{I} será:

$$\mathbb{I}^{anti} = \frac{1}{2}(\mathbf{1}\bar{\otimes}\mathbf{1} - \mathbf{1}\underline{\otimes}\mathbf{1}) \xrightarrow{\text{en componentes}} \mathbb{I}_{ijkl}^{anti} = \frac{1}{2}(\delta_{ik}\delta_{j\ell} - \delta_{i\ell}\delta_{jk}) \tag{1.177}$$

Se puede demostrar que, dado un tensor de segundo orden \mathbf{A} y un vector $\bar{\mathbf{b}}$ las siguientes relaciones son válidas:

$$\bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{1} = \bar{\mathbf{b}}$$

$$\mathbb{I} : \mathbf{A} = \mathbf{A} \quad ; \quad \mathbb{I}^{sym} : \mathbf{A} = \mathbf{A}^{sym}$$

$$\mathbf{A} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{A}) = A_{ii} \tag{1.178}$$

$$\mathbf{A}^2 : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{A}^2) = \text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = A_{il} A_{li}$$

$$\mathbf{A}^3 : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{A}^3) = \text{Tr}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}) = A_{ij} A_{jk} A_{ki}$$

1.5.3.5.2 Tensor Levi-Civita

El *Tensor Levi-Civita*, también conocido como *Tensor de Permutación*, es un tensor de tercer orden definido como:

$$\boldsymbol{\epsilon} = \epsilon_{ijk} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \tag{1.179}$$

donde ϵ_{ijk} son las componentes del operador de permutación definido en (1.56).

Ejemplo 1.19: Demostrar que: $\mathbf{T} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{T})$.

Solución:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} : \mathbf{1} &= T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j : \delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= T_{ij} \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= T_{ij} \delta_{ij} = T_{ii} = T_{jj} \\ &= \text{Tr}(\mathbf{T}) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.20: Probar que si $\boldsymbol{\sigma}$ y \mathbf{D} son tensores de segundo orden la siguiente relación es válida:

$$\boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} = \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})$$

Solución: Basándonos en lo que fue demostrado en (1.96), podemos decir que:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} &= \sigma_{ij} D_{ji} \\ &= \sigma_{kj} D_{jl} \delta_{ik} \delta_{il} = \sigma_{kj} D_{jl} \delta_{lk} \\ &= \underbrace{\sigma_{kj} D_{jl}}_{(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})_{kl}} \delta_{lk} \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})_{kl} \delta_{lk} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})_{kk} = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D})_{ll} \\ &= \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Una segunda alternativa para la demostración sería:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\sigma} \cdot \cdot \mathbf{D} &= \sigma_{ij} D_{ji} = \sigma_{ij} D_{jk} \delta_{ik} \\ &= (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) : \mathbf{1} \\ &= \text{Tr}(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{D}) \quad c.q.d. \end{aligned}$$

1.5.3.6 Determinante de un Tensor

El determinante de un tensor es un escalar y también es un invariante:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &\equiv |\mathbf{A}| \\ &= \epsilon_{ijk} A_{1i} A_{2j} A_{3k} = \underbrace{\epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}}_{|\mathbf{A}^T|}\end{aligned}\quad (1.180)$$

El determinante de un tensor es igual al determinante de la matriz que contiene las componentes del tensor.

La demostración puede hacerse partiendo directamente del determinante:

$$\begin{aligned}\det(\mathbf{A}) &= |\mathbf{A}| = \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} \\ &= A_{11}(A_{22}A_{33} - A_{23}A_{32}) - A_{21}(A_{12}A_{33} - A_{13}A_{32}) + A_{31}(A_{12}A_{23} - A_{13}A_{22}) \\ &= A_{11}(\epsilon_{1jk} A_{j2} A_{k3}) - A_{21}(-\epsilon_{2jk} A_{j2} A_{k3}) + A_{31}(\epsilon_{3jk} A_{j2} A_{k3}) \\ &= \epsilon_{1jk} A_{11} A_{j2} A_{k3} + \epsilon_{2jk} A_{21} A_{j2} A_{k3} + \epsilon_{3jk} A_{31} A_{j2} A_{k3} \\ &= \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3}\end{aligned}\quad (1.181)$$

Algunas consideraciones sobre el determinante de un tensor:

$$\det(\mathbf{1}) = 1 \quad (1.182)$$

- Podemos concluir de (1.180) que:

$$\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A}) \quad (1.183)$$

- También se puede demostrar que la siguiente relación es válida:

$$\det(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A}) \det(\mathbf{B}) \quad (1.184)$$

$$\det(\alpha \mathbf{A}) = \alpha^3 \det(\mathbf{A}) \quad \text{siendo } \alpha \text{ un escalar}$$

- Un tensor (\mathbf{A}) se dice que es singular si $\det(\mathbf{A}) = 0$.
- Intercambiando dos líneas o columnas el signo del determinante cambia.
- Si todos elementos de una fila o columna son cero, el determinante es cero.
- Multiplicando todos los elementos de una fila o columna por una constante c (escalar), el determinante queda: $c|\mathbf{A}|$.

Ejemplo 1.21: Demostrar que: $|\mathbf{A}| \epsilon_{tpq} = \epsilon_{rjk} A_{rt} A_{jp} A_{kq}$

Solución:

Sabemos que:

$$\begin{aligned}|\mathbf{A}| &= \epsilon_{rjk} A_{r1} A_{j2} A_{k3} \\ |\mathbf{A}| \epsilon_{tpq} &= \epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq} A_{r1} A_{j2} A_{k3}\end{aligned}\quad (1.185)$$

Como lo visto anteriormente, ecuación (1.62), la expresión $\epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq}$ podrá ser expresada en función de la delta de Dirac como:

$$\begin{aligned}\epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq} &= \begin{vmatrix} \delta_{rt} & \delta_{rp} & \delta_{rq} \\ \delta_{jt} & \delta_{jp} & \delta_{jq} \\ \delta_{kt} & \delta_{kp} & \delta_{kq} \end{vmatrix} \\ &= \delta_{rt} \delta_{jp} \delta_{kq} + \delta_{rp} \delta_{jq} \delta_{kt} + \delta_{rq} \delta_{jt} \delta_{kp} - \delta_{rq} \delta_{jp} \delta_{kt} - \delta_{jq} \delta_{kp} \delta_{rt} - \delta_{kq} \delta_{jt} \delta_{rp}\end{aligned}\quad (1.186)$$

Reemplazando en la expresión anterior (1.186) en la expresión (1.185), y utilizando la propiedad del operador de sustitución obtenemos que:

$$\begin{aligned} |\mathbf{A}| \epsilon_{tpq} &= \mathbf{A}_{t1} \mathbf{A}_{p2} \mathbf{A}_{q3} + \mathbf{A}_{p1} \mathbf{A}_{q2} \mathbf{A}_{t3} + \mathbf{A}_{q1} \mathbf{A}_{t2} \mathbf{A}_{p3} - \mathbf{A}_{q1} \mathbf{A}_{p2} \mathbf{A}_{t3} - \mathbf{A}_{t1} \mathbf{A}_{q2} \mathbf{A}_{p3} - \mathbf{A}_{p1} \mathbf{A}_{t2} \mathbf{A}_{q3} \\ &= \mathbf{A}_{t1} (\epsilon_{1jk} \mathbf{A}_{pj} \mathbf{A}_{qk}) + \mathbf{A}_{t2} (\epsilon_{2jk} \mathbf{A}_{pj} \mathbf{A}_{qk}) + \mathbf{A}_{t3} (\epsilon_{3jk} \mathbf{A}_{pj} \mathbf{A}_{qk}) \\ &= \epsilon_{rjk} \mathbf{A}_{rt} \mathbf{A}_{jp} \mathbf{A}_{kq} = \epsilon_{rjk} \mathbf{A}_{tr} \mathbf{A}_{pj} \mathbf{A}_{qk} \quad c.q.d. \end{aligned}$$

Ejemplo 1.22: Demostrar que: $|\mathbf{A}| = \frac{1}{6} \epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq} \mathbf{A}_{rt} \mathbf{A}_{jp} \mathbf{A}_{kq}$

Solución:

Partiendo del problema anterior: $|\mathbf{A}| \epsilon_{tpq} = \epsilon_{rjk} \mathbf{A}_{rt} \mathbf{A}_{jp} \mathbf{A}_{kq}$ y multiplicando ambos lados por ϵ_{tpq} , resulta:

$$|\mathbf{A}| \epsilon_{tpq} \epsilon_{tpq} = \epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq} \mathbf{A}_{rt} \mathbf{A}_{jp} \mathbf{A}_{kq} \quad (1.187)$$

Utilizando la propiedad definida anteriormente en la ecuación (1.63), obtenemos que $\epsilon_{tpq} \epsilon_{tpq} = \delta_{tt} \delta_{pp} - \delta_{tp} \delta_{tp} = \delta_{tt} \delta_{pp} - \delta_{tt} = 6$. Luego, la relación (1.187) resulta:

$$|\mathbf{A}| = \frac{1}{6} \epsilon_{rjk} \epsilon_{tpq} \mathbf{A}_{rt} \mathbf{A}_{jp} \mathbf{A}_{kq} \quad c.q.d.$$

Ejemplo 1.23: Demostrar que:

$$\det(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = 1 + \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (1.188)$$

Solución:

Si denotamos por $\mathbf{A}_{ij} = \delta_{ij} + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_j$, el determinante de \mathbf{A} viene dado por $|\mathbf{A}| = \epsilon_{ijk} \mathbf{A}_{i1} \mathbf{A}_{j2} \mathbf{A}_{k3}$, donde $\mathbf{A}_{i1} = \delta_{i1} + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_1$, $\mathbf{A}_{j2} = \delta_{j2} + \mathbf{a}_j \mathbf{b}_2$ y $\mathbf{A}_{k3} = \delta_{k3} + \mathbf{a}_k \mathbf{b}_3$, luego podemos decir que:

$$\det(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = \epsilon_{ijk} (\delta_{i1} + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_1) (\delta_{j2} + \mathbf{a}_j \mathbf{b}_2) (\delta_{k3} + \mathbf{a}_k \mathbf{b}_3) \quad (1.189)$$

Desarrollando la expresión (1.189) obtenemos que:

$$\det(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = \epsilon_{ijk} [\delta_{i1} \delta_{j2} \delta_{k3} + \mathbf{a}_k \mathbf{b}_3 \delta_{i1} \delta_{j2} + \mathbf{a}_j \mathbf{b}_2 \delta_{i1} \delta_{k3} + \mathbf{a}_i \mathbf{b}_1 \delta_{j2} \delta_{k3} + \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 \delta_{j2} + \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \delta_{k3} + \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3]$$

Observemos que:

$$\epsilon_{ijk} \delta_{i1} \delta_{j2} \delta_{k3} = 1$$

$$\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_3 \delta_{i1} \delta_{j2} + \epsilon_{ijk} \mathbf{a}_j \mathbf{b}_2 \delta_{i1} \delta_{k3} + \epsilon_{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_1 \delta_{j2} \delta_{k3} =$$

$$\epsilon_{12k} \mathbf{a}_k \mathbf{b}_3 + \epsilon_{1j3} \mathbf{a}_j \mathbf{b}_2 + \epsilon_{i23} \mathbf{a}_i \mathbf{b}_1 = \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_3 + \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_2 + \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$$

$$\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 \delta_{j2} = \epsilon_{i2k} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 = \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_3 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 - \mathbf{a}_3 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_3 = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \delta_{k3} = \epsilon_{ij3} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = \epsilon_{123} \mathbf{a}_1 \mathbf{a}_2 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 - \epsilon_{213} \mathbf{a}_2 \mathbf{a}_1 \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 = 0$$

$$\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_i \mathbf{a}_j \mathbf{a}_k \mathbf{b}_1 \mathbf{b}_2 \mathbf{b}_3 = 0$$

Con lo que hemos demostrado que:

$$\det(\mathbf{1} + \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = 1 + \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad c.q.d.$$

También podemos demostrar que se cumple la siguiente relación:

$$\det[\mathbf{1} + \alpha (\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) + \beta (\bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{a}})] = 1 + \alpha (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) + \beta (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) + \alpha \beta [(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})^2 - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}})(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \quad (1.190)$$

donde α, β son escalares. Si $\beta = 0$ recaemos en la expresión $\det(\mathbf{1} + \alpha \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = 1 + \alpha \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}$. Si $\alpha = \beta$, obtenemos que:

$$\begin{aligned} \det(\mathbf{1} + \alpha \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}} + \alpha \bar{\mathbf{b}} \otimes \bar{\mathbf{a}}) &= 1 + \alpha(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) + \alpha(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) + \alpha^2 \left[(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})^2 - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}})(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \right] \\ &= 1 + \alpha \left[2(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) - \alpha(\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}})^2 \right] \end{aligned} \quad (1.191)$$

donde hemos utilizado la propiedad $(\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}})^2 - (\bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}})(\bar{\mathbf{b}} \cdot \bar{\mathbf{b}}) = -(\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}})^2$, ver **Ejemplo 1.1**.

Podemos demostrar que la siguiente propiedad es válida:

$$\boxed{(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{c}})] = \det(\mathbf{A}) [\bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}})]} \quad (1.192)$$

Para la demostración partiremos de la definición del triple producto escalar dada por (1.69), $\bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) = \epsilon_{ijk} \bar{a}_i \bar{b}_j \bar{c}_k$, y multiplicamos por ambos lados de la igualdad por el determinante del tensor \mathbf{A} , resultando:

$$\bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) |\mathbf{A}| = \epsilon_{ijk} \bar{a}_i \bar{b}_j \bar{c}_k |\mathbf{A}| \quad (1.193)$$

Fue demostrado en el **Ejemplo 1.21** que se cumple que $|\mathbf{A}| \epsilon_{ijk} = \epsilon_{pqr} A_{pi} A_{qj} A_{rk}$, con lo cual:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{a}} \cdot (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{c}}) |\mathbf{A}| &= \epsilon_{ijk} \bar{a}_i \bar{b}_j \bar{c}_k |\mathbf{A}| \\ &= \epsilon_{pqr} A_{pi} A_{qj} A_{rk} \bar{a}_i \bar{b}_j \bar{c}_k \\ &= \epsilon_{pqr} (A_{pi} \bar{a}_i) (A_{qj} \bar{b}_j) (A_{rk} \bar{c}_k) \\ &= (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{c}})] \end{aligned} \quad (1.194)$$

También podemos demostrar que la siguiente relación es válida:

$$\det(\alpha \mathbf{A} + \beta \mathbf{B}) = \alpha^3 \det(\mathbf{A}) + \alpha^2 \beta \text{Tr}[\mathbf{B} \cdot \text{adj}(\mathbf{A})] + \alpha \beta^2 \text{Tr}[\mathbf{A} \cdot \text{adj}(\mathbf{B})] + \beta^3 \det(\mathbf{B}) \quad (1.195)$$

Para el caso particular cuando $\beta = 1$, $\mathbf{A} = \mathbf{1}$, $\mathbf{B} = \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}$, y además teniendo en cuenta que $\det(\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = 0$, y $\text{cof}(\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = \mathbf{0}$, concluimos que:

$$\det(\mathbf{1} + \beta \bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}}) = \det(\mathbf{1}) + \beta \text{Tr}[\bar{\mathbf{a}} \otimes \bar{\mathbf{b}} \cdot \mathbf{1}] = 1 + \beta \text{Tr}[\bar{a}_i \bar{b}_j] = 1 + \beta \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad (1.196)$$

cuya relación ya fue demostrada anteriormente.

1.5.3.7 Inversa de un Tensor

La inversa de un tensor \mathbf{A} es un tensor \mathbf{A}^{-1} :

$$\text{si } |\mathbf{A}| \neq 0 \Leftrightarrow \exists \mathbf{A}^{-1} \mid \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{A} = \mathbf{1} \quad (1.197)$$

En notación indicial:

$$A_{ij} A_{jk}^{-1} = \delta_{ik} \quad (1.198)$$

La expresión de la inversa podemos obtener partiendo de la definición de la adjunta de un tensor dada por (1.151), $\text{adj}(\mathbf{A}^T) \cdot (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) = (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})$, y multiplicamos escalarmente por el vector $\bar{\mathbf{d}}$, resultando:

$$\begin{aligned} \{\text{adj}(\mathbf{A})\}^T \cdot (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{d}} &= [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \cdot \mathbf{1} \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \cdot \mathbf{A} \cdot \underbrace{\mathbf{A}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{d}}}_{\bar{\mathbf{c}}} \end{aligned} \quad (1.199)$$

Observemos que en (1.194), hemos demostrado que:

$$\bar{\mathbf{c}} \cdot (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) |\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{c}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \quad (1.200)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \{\text{adj}(\mathbf{A})\}^T \cdot (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) \cdot \bar{\mathbf{d}} &= [(\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{b}})] \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{d}} \\ &= |\mathbf{A}| (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) \cdot \mathbf{A}^{-1} \cdot \bar{\mathbf{d}} \end{aligned} \quad (1.201)$$

El vector resultante de la operación $(\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}})$ representamos por el vector $\bar{\mathbf{p}} = (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}})$, con lo cual la expresión anterior en notación inicial queda:

$$\begin{aligned} \{\text{adj}(\mathbf{A})\}_{ki} p_k d_i &= |\mathbf{A}| p_k A_{ki}^{-1} d_i \\ \Rightarrow [\text{adj}(\mathbf{A})]_{ki} p_k d_i &= |\mathbf{A}| A_{ki}^{-1} p_k d_i \\ \Rightarrow [\text{adj}(\mathbf{A})] : (\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) \otimes \bar{\mathbf{d}} &= |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} : [(\bar{\mathbf{a}} \wedge \bar{\mathbf{b}}) \otimes \bar{\mathbf{d}}] \end{aligned} \quad (1.202)$$

Con lo cual concluimos que:

$$[\text{adj}(\mathbf{A})] = |\mathbf{A}| \mathbf{A}^{-1} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{|\mathbf{A}|} [\text{adj}(\mathbf{A})] = \frac{1}{|\mathbf{A}|} [\text{cof}(\mathbf{A})]^T} \quad (1.203)$$

Algunas consideraciones sobre la inversa de tensores:

- Si los tensores \mathbf{A} y \mathbf{B} son invertibles entonces las siguientes propiedades son válidas:

$$\begin{aligned} (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= \mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} \\ (\mathbf{A}^{-1})^{-1} &= \mathbf{A} \\ (\beta \mathbf{A})^{-1} &= \frac{1}{\beta} \mathbf{A}^{-1} \\ \det(\mathbf{A}^{-1}) &= [\det(\mathbf{A})]^{-1} \end{aligned} \quad (1.204)$$

- La siguiente nomenclatura será utilizada para representar la transpuesta de la inversa:

$$\mathbf{A}^{-T} \equiv (\mathbf{A}^{-1})^T \equiv (\mathbf{A}^T)^{-1} \quad (1.205)$$

Podemos demostrar que también es válida la relación $\text{adj}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = \text{adj}(\mathbf{B}) \cdot \text{adj}(\mathbf{A})$, partiendo de la propia definición de la inversa (1.203):

$$\begin{aligned}
\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= \frac{[\text{adj}(\mathbf{B})]}{|\mathbf{B}|} \cdot \frac{[\text{adj}(\mathbf{A})]}{|\mathbf{A}|} \\
\Rightarrow |\mathbf{A}||\mathbf{B}|\mathbf{B}^{-1} \cdot \mathbf{A}^{-1} &= [\text{adj}(\mathbf{B})] \cdot [\text{adj}(\mathbf{A})] \\
\Rightarrow |\mathbf{A}||\mathbf{B}|(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^{-1} &= [\text{adj}(\mathbf{B})] \cdot [\text{adj}(\mathbf{A})] \\
\Rightarrow |\mathbf{A}||\mathbf{B}| \frac{[\text{adj}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})]}{|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}|} &= [\text{adj}(\mathbf{B})] \cdot [\text{adj}(\mathbf{A})] \\
\Rightarrow \text{adj}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) &= [\text{adj}(\mathbf{B})] \cdot [\text{adj}(\mathbf{A})]
\end{aligned} \tag{1.206}$$

donde hemos utilizado la propiedad que $|\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|$. Análogamente podemos demostrar que $\text{cof}(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) = [\text{cof}(\mathbf{A})] \cdot [\text{cof}(\mathbf{B})]$.

Inversa de una matriz

Pasos para obtener la inversa de una matriz \mathcal{A} :

1) Obtener la matriz cofactor: $\text{cof}(\mathcal{A})$.

Sea la matriz \mathcal{A} :

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \tag{1.207}$$

Definiremos la matriz \mathcal{M} donde las componentes \mathcal{M}_{ij} serán obtenidas a partir del determinante resultante de la matriz \mathcal{A} al eliminar la línea i y la columna j , es decir:

$$\mathcal{M} = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} A_{22} & A_{23} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{23} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{21} & A_{22} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{32} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{31} & A_{33} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{31} & A_{32} \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} A_{12} & A_{13} \\ A_{22} & A_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{13} \\ A_{21} & A_{23} \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{vmatrix} \end{bmatrix} \tag{1.208}$$

con esto podemos definir la matriz cofactor de \mathcal{A} :

$$\text{cof}(\mathcal{A}) = (-1)^{i+j} \mathcal{M}_{ij} \tag{1.209}$$

2) Obtener la adjunta de la matriz \mathcal{A} :

La adjunta de la matriz \mathcal{A} es la transpuesta de la matriz cofactor:

$$\text{adj}(\mathcal{A}) = [\text{cof}(\mathcal{A})]^T \tag{1.210}$$

3) La inversa será:

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{\text{adj}(\mathcal{A})}{|\mathcal{A}|} \tag{1.211}$$

luego se cumple que:

$$\mathcal{A}[\text{adj}(\mathcal{A})] = |\mathcal{A}|\mathbf{1} \tag{1.212}$$

donde $\mathbf{1}$ es la matriz identidad.

Teniendo en cuenta (1.65), podemos expresar las componentes de la primera, segunda, tercera fila de la matriz cofactor, (1.209), respectivamente como: $M_{1i} = \epsilon_{ijk} A_{2j} A_{3k}$, $M_{2i} = \epsilon_{ijk} A_{1j} A_{3k}$, $M_{3i} = \epsilon_{ijk} A_{1j} A_{2k}$.

Ejemplo 1.24: Dado un tensor \mathbf{A} , demostrar que existe un vector no nulo $\vec{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ tal que $\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}$ si y solo si $\det(\mathbf{A}) = 0$.

Solución: Partimos del hecho que $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}| = 0$ y también escogemos una base arbitrario $\{\vec{\mathbf{f}}, \vec{\mathbf{g}}, \vec{\mathbf{h}}\}$ (linealmente independiente), y reemplazamos en la definición obtenida en (1.194):

$$\vec{\mathbf{f}} \cdot (\vec{\mathbf{g}} \wedge \vec{\mathbf{h}}) |\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{f}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{g}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}})]$$

Por el hecho que $\det(\mathbf{A}) \equiv |\mathbf{A}| = 0$, eso implica que:

$$(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{f}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{g}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}})] = 0$$

Con lo cual concluimos que los vectores $(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{f}})$, $(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{g}})$, $(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}})$ son linealmente dependientes. Esto implica que existen escalares no nulos $\alpha \neq 0$, $\beta \neq 0$, $\gamma \neq 0$ tal que:

$$\alpha(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{f}}) + \beta(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{g}}) + \gamma(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \cdot (\alpha \vec{\mathbf{f}} + \beta \vec{\mathbf{g}} + \gamma \vec{\mathbf{h}}) = \vec{\mathbf{0}}$$

$$\Rightarrow \mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}$$

donde $\vec{\mathbf{n}} = \alpha \vec{\mathbf{f}} + \beta \vec{\mathbf{g}} + \gamma \vec{\mathbf{h}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, ver **Ejemplo 1.10**.

Ahora escogemos dos vectores $\vec{\mathbf{k}}$, $\vec{\mathbf{m}}$ que no son linealmente independientes con $\vec{\mathbf{n}}$ y reemplazamos esta base $\{\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}}\}$ en lugar de los vectores $\{\vec{\mathbf{a}}, \vec{\mathbf{b}}, \vec{\mathbf{c}}\}$ de la definición en (1.194):

$$\vec{\mathbf{k}} \cdot (\vec{\mathbf{m}} \wedge \vec{\mathbf{n}}) |\mathbf{A}| = (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{k}}) \cdot [(\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{m}}) \wedge (\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{n}})]$$

Considerando que $\mathbf{A} \cdot \vec{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}}$ y que $\vec{\mathbf{k}} \cdot (\vec{\mathbf{m}} \wedge \vec{\mathbf{n}}) \neq 0$, ya que la base $\{\vec{\mathbf{k}}, \vec{\mathbf{m}}, \vec{\mathbf{n}}\}$ está constituida por vectores linealmente independientes, obtenemos que:

$$\underbrace{\vec{\mathbf{k}} \cdot (\vec{\mathbf{m}} \wedge \vec{\mathbf{n}})}_{\neq 0} |\mathbf{A}| = 0$$

$$\Rightarrow |\mathbf{A}| = 0 \quad c.q.d.$$

1.5.3.8 Tensores Ortogonales

Tensores ortogonales (tensores de rotación) juega un papel muy importante en la mecánica del continuo. Un tensor de segundo orden (\mathbf{Q}) se dice que es ortogonal cuando la transpuesta (\mathbf{Q}^T) es igual a la inversa (\mathbf{Q}^{-1}):

$$\mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^{-1} \quad (1.213)$$

Luego, se cumple que:

$$\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T = \mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q} = \mathbf{1} \quad (1.214)$$

En notación indicial:

$$\begin{aligned}
\mathbf{Q} \cdot \mathbf{Q}^T &= (Q_{ik} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \cdot (Q_{jl} \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= Q_{ik} Q_{jl} \delta_{kl} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= Q_{ik} Q_{jk} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \delta_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)
\end{aligned} \tag{1.215}$$

Una transformación *ortogonal propia* tiene las siguientes características:

- La inversa de \mathbf{Q} es igual a la transpuesta (ortogonalidad):

$$\mathbf{Q}^{-1} = \mathbf{Q}^T \tag{1.216}$$

- El tensor \mathbf{Q} será propio si:

$$\det(\mathbf{Q}) \equiv |\mathbf{Q}| = +1 \tag{1.217}$$

Un tensor ortogonal es impropio cuando $|\mathbf{Q}| = -1$. Podemos demostrar que si \mathbf{A} y \mathbf{B} son tensores ortogonales, un tercer tensor resultante del producto $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = \mathbf{C}$ también es un tensor ortogonal.

Consideremos dos vectores arbitrarios $\bar{\mathbf{a}}$ y $\bar{\mathbf{b}}$ y que a través de una transformación ortogonal obtenemos:

$$\tilde{\mathbf{a}} = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{a}} \quad ; \quad \tilde{\mathbf{b}} = \mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{b}} \tag{1.218}$$

El producto escalar de los vectores resultantes de esta operación ($\tilde{\mathbf{a}}$) y ($\tilde{\mathbf{b}}$) viene dado por:

$$\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{b}} = (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{a}}) \cdot (\mathbf{Q} \cdot \bar{\mathbf{b}}) = \bar{\mathbf{a}} \cdot \underbrace{\mathbf{Q}^T \cdot \mathbf{Q}}_{=\mathbf{1}} \cdot \bar{\mathbf{b}} = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{b}} \tag{1.219}$$

Lo que también es válido cuando $\tilde{\mathbf{a}} = \tilde{\mathbf{b}}$, luego $\tilde{\mathbf{a}} \cdot \tilde{\mathbf{a}} = \|\tilde{\mathbf{a}}\|^2 = \bar{\mathbf{a}} \cdot \bar{\mathbf{a}} = \|\bar{\mathbf{a}}\|^2$. Con lo que concluimos que una transformación ortogonal aplicada a vectores, preserva los módulos de los vectores y preserva los ángulos entre los vectores, Figura 1.19. Es decir, una transformación ortogonal está caracterizada sólo por rotaciones de los vectores.

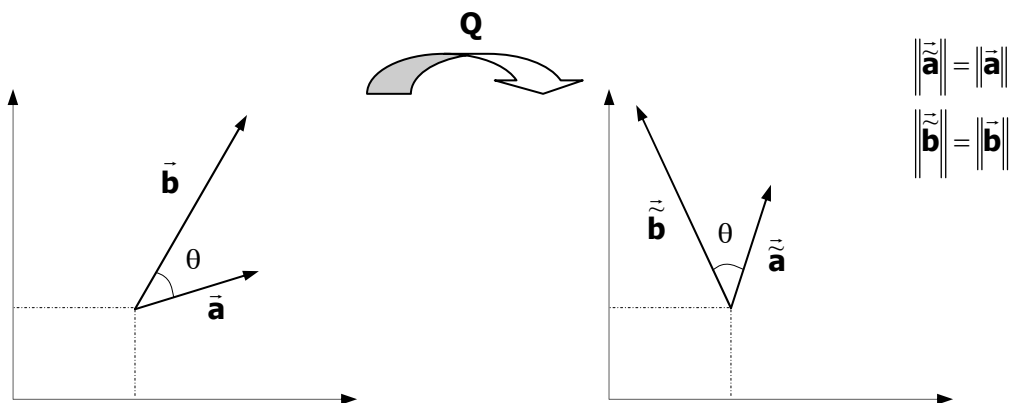


Figura 1.19: Transformación ortogonal.

1.5.3.9 Tensor Definido Positivo y Tensor Semi-Definido Positivo

Decimos que un tensor es *definido positivo* cuando se cumple que:

$$\begin{array}{lll}
 \text{Notación Tensorial} & \text{Notación Indicial} & \text{Notación Matricial} \\
 \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} > 0 & x_i T_{ij} x_j > 0 & \mathbf{x}^T \mathbf{T} \mathbf{x} > 0
 \end{array} \quad (1.220)$$

para todo vector $\bar{\mathbf{x}}$ no nulo. Una condición necesaria y suficiente para que un tensor sea definido positivo es que sus autovalores ($\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$) sean positivos (cuya demostración se encuentra en el subapartado “Representación Espectral de un Tensor”), y el tensor será *semi-definido positivo* si $\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq 0$ para todo $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$. Recordar que también se cumple que $\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T}^{sym} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq 0$.

Si $\alpha = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} = \mathbf{T} : (\bar{\mathbf{x}} \otimes \bar{\mathbf{x}}) = T_{ij} x_i x_j$, luego la derivada de α con respecto a $\bar{\mathbf{x}}$ viene dada por:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha}{\partial x_k} &= T_{ij} \frac{\partial x_i}{\partial x_k} x_j + T_{ij} x_i \frac{\partial x_j}{\partial x_k} \\
 &= T_{ij} \delta_{ik} x_j + T_{ij} x_i \delta_{jk} \\
 &= T_{kj} x_j + T_{ik} x_i \\
 &= (T_{ki} + T_{ik}) x_i
 \end{aligned} \quad (1.221)$$

Con lo que concluimos que:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial \bar{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{T}^{sym} \cdot \bar{\mathbf{x}} \quad (1.222)$$

y que:

$$\frac{\partial^2 \alpha}{\partial \bar{\mathbf{x}} \otimes \partial \bar{\mathbf{x}}} = 2\mathbf{T}^{sym} \quad (1.223)$$

Ejemplo 1.25: Sea un tensor de segundo orden arbitrario \mathbf{F} . Demostrar que los tensores resultantes $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ son tensores *simétricos* y *semi-definidos positivos*. Verificar también en que condiciones \mathbf{C} y \mathbf{b} son *tensores definidos positivos*.

Solución:

Simetría:

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F})^T &= \mathbf{F}^T \cdot (\mathbf{F}^T)^T = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \\
 (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T)^T &= (\mathbf{F}^T)^T \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T
 \end{aligned}$$

Con lo cual hemos demostrado que los tensores $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ son simétricos. Para demostrar que los tensores $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ son semi-definidos positivos, partimos de la definición de un tensor semi-definido positivo, es decir, un tensor \mathbf{A} es semi-definido positivo si se cumple que $\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{A} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq 0$, para todo $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$. Luego:

$$\begin{array}{l|l}
 \bar{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}) \cdot \bar{\mathbf{x}} & \bar{\mathbf{x}} \cdot (\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T) \cdot \bar{\mathbf{x}} \\
 = \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{x}} & = \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{x}} \\
 = (\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{x}}) & = (\mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}) \cdot (\mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}) \\
 = \|\mathbf{F} \cdot \bar{\mathbf{x}}\|^2 \geq 0 & = \|\mathbf{F}^T \cdot \bar{\mathbf{x}}\|^2 \geq 0
 \end{array}$$

Con lo cual demostramos que $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ son semi-definidos positivos. Observemos que $\vec{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{C} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \|\mathbf{F} \cdot \vec{\mathbf{x}}\|^2$ sólo será igual a cero, con $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, si $\mathbf{F} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$, y por definición $\mathbf{F} \cdot \vec{\mathbf{x}} = \vec{\mathbf{0}}$ con $\vec{\mathbf{x}} \neq \vec{\mathbf{0}}$, si y solo si $\det(\mathbf{F}) = 0$, ver **Ejemplo 1.24**. Luego, los tensores $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ serán *tensores definidos positivos* si y solo si $\det(\mathbf{F}) \neq 0$.

1.5.3.10 Descomposición Aditiva de Tensores

Dados dos tensores arbitrarios \mathbf{S} , $\mathbf{T} \neq \mathbf{0}$, y un escalar α , podemos hacer la representación del tensor \mathbf{S} a través de la siguiente descomposición aditiva de tensores:

$$\mathbf{S} = \alpha \mathbf{T} + \mathbf{U} \quad \text{donde} \quad \mathbf{U} = \mathbf{S} - \alpha \mathbf{T} \quad (1.224)$$

Observemos que dependiendo del valor de α tendremos infinitas posibilidades para la representación del tensor \mathbf{S} de forma aditiva de tensores. Pero, si $\text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{U}^T) = \text{Tr}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}^T) = 0$ la descomposición aditiva es única. Partiendo de (1.224) podemos obtener el valor de α :

$$\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T = \alpha \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T + \mathbf{U} \cdot \mathbf{T}^T \Rightarrow \text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T) = \alpha \text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T) + \underbrace{\text{Tr}(\mathbf{U} \cdot \mathbf{T}^T)}_{=0} = \alpha \text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T) \quad (1.225)$$

con lo cual obtenemos que:

$$\alpha = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T)}{\text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T)} \quad (1.226)$$

Como ejemplo, supongamos que $\mathbf{T} = \mathbf{1}$, obtenemos α como:

$$\alpha = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T)}{\text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T)} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{1})}{\text{Tr}(\mathbf{1} \cdot \mathbf{1})} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{\text{Tr}(\mathbf{1})} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{3} \quad (1.227)$$

Con eso podemos definir el tensor \mathbf{U} como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} - \alpha \mathbf{T} = \mathbf{S} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{3} \mathbf{1} \equiv \mathbf{S}^{dev} \quad (1.228)$$

Luego:

$$\mathbf{S} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{3} \mathbf{1} + \mathbf{S}^{dev} = \mathbf{S}^{esf} + \mathbf{S}^{dev} \quad (1.229)$$

NOTA: Al tensor $\mathbf{S}^{esf} = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{3} \mathbf{1}$ denominamos de tensor esférico y al tensor $\mathbf{S}^{dev} = \mathbf{S} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{S})}{3} \mathbf{1}$ de tensor desviador. ■

Supongamos ahora que el tensor $\mathbf{T} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T)$ luego, podemos definir α como:

$$\alpha = \frac{\text{Tr}(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T}^T)}{\text{Tr}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^T)} = \frac{\frac{1}{2} \text{Tr}[\mathbf{S} \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T)^T]}{\frac{1}{4} \text{Tr}[(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) \cdot (\mathbf{S} + \mathbf{S}^T)^T]} = 1 \quad (1.230)$$

Con eso podemos definir el tensor \mathbf{U} como:

$$\mathbf{U} = \mathbf{S} - \alpha \mathbf{T} = \mathbf{S} - \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) = \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) \quad (1.231)$$

Representando así el tensor \mathbf{S} a través de la siguiente descomposición aditiva única como:

$$\mathbf{S} = \frac{1}{2}(\mathbf{S} + \mathbf{S}^T) + \frac{1}{2}(\mathbf{S} - \mathbf{S}^T) = \mathbf{S}^{sym} + \mathbf{S}^{anti} \quad (1.232)$$

que es la misma obtenida en la descomposición aditiva de un tensor en una parte simétrica y otra antisimétrica, ver expresión (1.148).

1.5.3.11 Derivada Temporal de Tensores

Asumamos que un tensor de segundo orden depende de un parámetro t , que es el tiempo. Definimos la primera derivada temporal y la segunda derivada temporal del tensor \mathbf{T} , respectivamente, por:

$$\frac{D}{Dt} \mathbf{T} = \dot{\mathbf{T}} \quad ; \quad \frac{D^2}{Dt^2} \mathbf{T} = \ddot{\mathbf{T}} \quad (1.233)$$

La derivada temporal del determinante de un tensor viene definida como:

$$\frac{D}{Dt} [\det(\mathbf{T})] = \frac{D\mathbf{T}_{ij}}{Dt} \text{cof}(\mathbf{T}_{ij}) \quad (1.234)$$

donde $\text{cof}(\mathbf{T}_{ij})$ es el cofactor de \mathbf{T}_{ij} y definido como $[\text{cof}(\mathbf{T}_{ij})]^T = \det(\mathbf{T})(\mathbf{T}^{-1})_{ij}$.

1.5.3.12 Módulo de un Tensor

El módulo de un tensor, también conocido como *Norma de Frobenius*, viene dado a continuación:

$$\|\vec{v}\| = \sqrt{\vec{v} \cdot \vec{v}} = \sqrt{v_i v_i} \quad (\text{vector}) \quad (1.235)$$

$$\|\mathbf{T}\| = \sqrt{\mathbf{T} : \mathbf{T}} = \sqrt{\mathbf{T}_{ij} \mathbf{T}_{ij}} \quad (\text{tensor de segundo orden}) \quad (1.236)$$

$$\|\mathbf{A}\| = \sqrt{\mathbf{A} : : \mathbf{A}} = \sqrt{\mathbf{A}_{ijk} \mathbf{A}_{ijk}} \quad (\text{tensor de tercer orden}) \quad (1.237)$$

$$\|\mathbf{C}\| = \sqrt{\mathbf{C} :: \mathbf{C}} = \sqrt{\mathbf{C}_{ijkl} \mathbf{C}_{ijkl}} \quad (\text{tensor de cuarto orden}) \quad (1.238)$$

1.5.4 Ley de Transformación de las Componentes de Tensores

Las componentes de un tensor dependen del sistema de coordenadas, es decir, si cambia el sistema de coordenadas debido a una rotación del sistema, las componentes también cambiarán. Entre los sistemas de coordenadas, las componentes están relacionadas entre sí a través de las *leyes de transformación de base*, Figura 1.20.

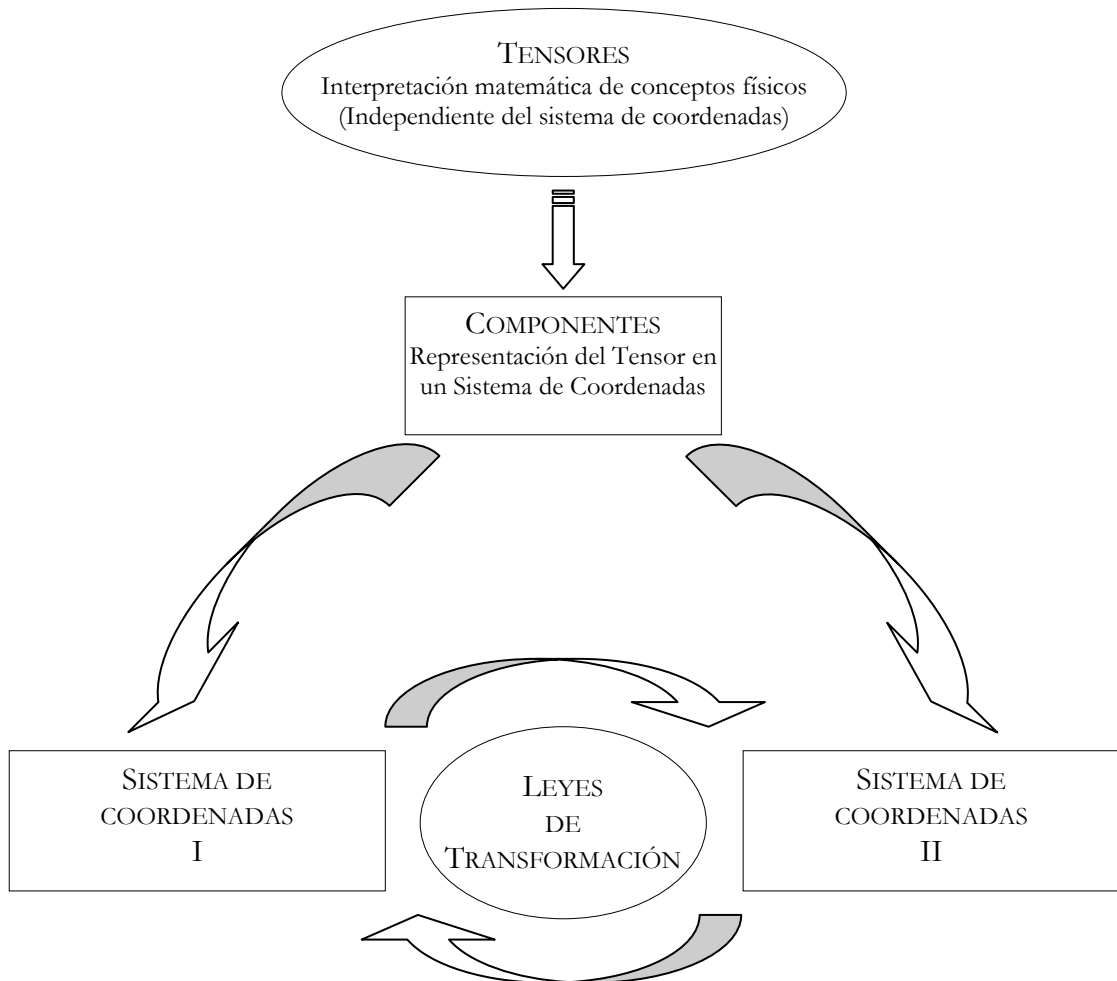


Figura 1.20: Leyes de transformación de base.

Consideremos el sistema de coordenadas cartesianas (x_1, x_2, x_3) representado por la base ortonormal $(\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3)$, véase Figura 1.21. En este sistema, un vector arbitrario $\bar{\mathbf{v}}$ representamos a través de sus componentes como sigue:

$$\bar{\mathbf{v}} = v_i \hat{\mathbf{e}}_i = v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.239)$$

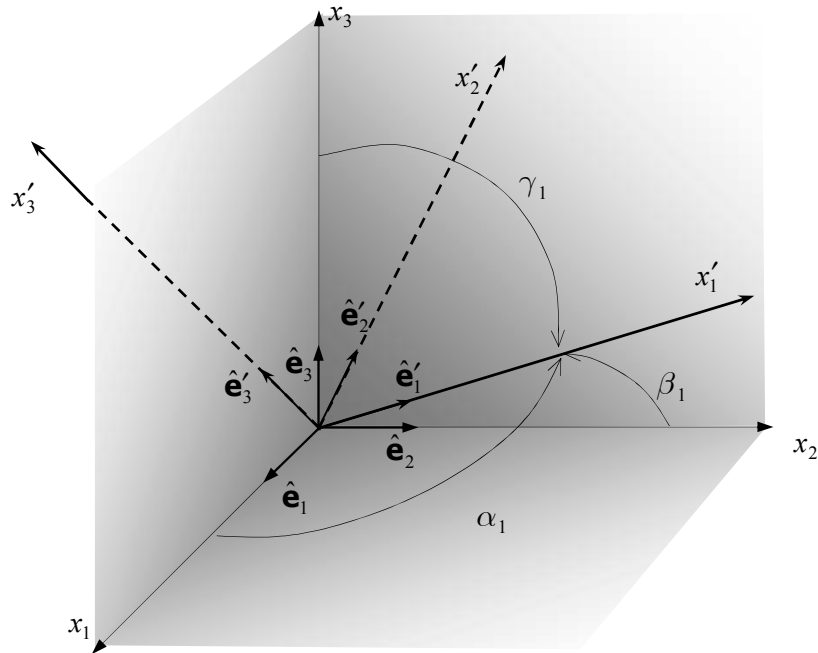


Figura 1.21: Transformación de coordenadas.

Representaremos sus componentes a través de una matriz columna, *i.e.*:

$$(\bar{\mathbf{v}})_i = v_i = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} \quad (1.240)$$

Considerando ahora un nuevo sistema de coordenadas ortogonal (x'_1, x'_2, x'_3) , representado por sus respectivos versores $(\hat{\mathbf{e}}'_1, \hat{\mathbf{e}}'_2, \hat{\mathbf{e}}'_3)$, como se muestra en la Figura 1.21, el vector $\bar{\mathbf{v}}$ será representado en este sistema como $v'_j \hat{\mathbf{e}}'_j$.

Como hemos mencionado anteriormente un vector, por ser un tensor, es independiente del sistema adoptado, luego:

$$\bar{\mathbf{v}} = v'_k \hat{\mathbf{e}}'_k = v_j \hat{\mathbf{e}}_j \quad (1.241)$$

Para obtener las componentes según una dirección es suficiente hacer el producto escalar por el versor correspondiente a esta dirección:

$$\begin{aligned} v'_k \hat{\mathbf{e}}'_k \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i &= (v_j \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \\ v'_k \delta_{ki} &= (v_j \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \\ v'_i &= (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_i \end{aligned} \quad (1.242)$$

o aún:

$$\begin{bmatrix} v'_1 \\ v'_2 \\ v'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ (v_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + v_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix} \quad (1.243)$$

Reestructurando la expresión anterior, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix} \quad (1.244)$$

o aún:

$$\mathbf{v}'_i = a_{ij} \mathbf{v}_j \quad (1.245)$$

donde definimos la matriz de transformación de coordenadas $\mathcal{A} \equiv a_{ij}$ como:

$$\mathcal{A} \equiv a_{ij} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 & \hat{\mathbf{e}}_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 & \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}'_1 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}'_2 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}'_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad (1.246)$$

Considerando el producto escalar $\hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \hat{\mathbf{e}}_j = \|\hat{\mathbf{e}}'_i\| \|\hat{\mathbf{e}}_j\| \cos(x'_i, x_j)$, ver ecuación (1.4), la relación anterior será expresada a través de los cosenos directores por:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}'_1 \\ \mathbf{v}'_2 \\ \mathbf{v}'_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}'} = \underbrace{\begin{bmatrix} \cos(x'_1, x_1) & \cos(x'_1, x_2) & \cos(x'_1, x_3) \\ \cos(x'_2, x_1) & \cos(x'_2, x_2) & \cos(x'_2, x_3) \\ \cos(x'_3, x_1) & \cos(x'_3, x_2) & \cos(x'_3, x_3) \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{v}_1 \\ \mathbf{v}_2 \\ \mathbf{v}_3 \end{bmatrix}}_{\mathbf{v}} \quad (1.247)$$

$$\boxed{\mathbf{v}' = \mathcal{A} \mathbf{v}}$$

En la Figura 1.21, $\cos \alpha_1 = \cos(x'_1, x_1)$, $\cos \beta_1 = \cos(x'_1, x_2)$ y $\cos \gamma_1 = \cos(x'_1, x_3)$. Observemos que esta matriz es no simétrica $\mathcal{A} \neq \mathcal{A}^T$, y será representada explícitamente por:

$$a_{ij} \equiv \mathcal{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \quad (1.248)$$

La inversa de la ecuación (1.245) será:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_k \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_i &= \mathbf{v}'_j \hat{\mathbf{e}}'_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \\ \mathbf{v}_k \delta_{ki} &= \mathbf{v}'_j a_{ji} \\ \mathbf{v}_i &= \mathbf{v}'_j a_{ji} \\ \mathbf{v} &= \mathcal{A}^T \mathbf{v}' \end{aligned} \quad (1.249)$$

También podemos decir que:

$$\boxed{\hat{\mathbf{e}}_i = a_{ji} \hat{\mathbf{e}}'_j} \quad (1.250)$$

La inversa de la relación (1.247) viene dada por:

$$\mathbf{v} = \mathcal{A}^{-1} \mathbf{v}' \quad (1.251)$$

Comparando las relaciones (1.251) y (1.249), concluimos que la matriz \mathcal{A} es una matriz ortogonal, es decir:

$$\mathcal{A}^{-1} = \mathcal{A}^T \quad \Rightarrow \quad \mathcal{A}^T \mathcal{A} = \mathbf{1} \xrightarrow{\text{Notación Indicial}} a_{ki} a_{kj} = \delta_{ij} \quad (1.252)$$

Tensor de segundo orden

Consideremos un sistema de coordenadas representado por su base ortonormal $\hat{\mathbf{e}}_i$ luego, el cambio de base para un nuevo sistema representado por su base ortonormal $\hat{\mathbf{e}}'_i$ será dado por la ley de transformación: $\hat{\mathbf{e}}_k = a_{ik} \hat{\mathbf{e}}'_i$. Consideremos ahora la representación de un tensor de segundo orden \mathbf{T} de forma simbólica:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= T_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= T_{kl} a_{ik} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes a_{jl} \hat{\mathbf{e}}'_j \\ &= T_{kl} a_{ik} a_{jl} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes \hat{\mathbf{e}}'_j \\ &= T'_{ij} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes \hat{\mathbf{e}}'_j \end{aligned} \quad (1.253)$$

Resultando que la transformación de base para las componentes de tensores de segundo será:

$$T'_{ij} = T_{kl} a_{ik} a_{jl} \quad (1.254)$$

Tensor de tercer orden

Consideremos ahora un tensor de tercer orden \mathbf{S} representado en la base $\hat{\mathbf{e}}_i$:

$$\begin{aligned} \mathbf{S} &= S_{lmn} \hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_m \otimes \hat{\mathbf{e}}_n \\ &= S_{lmn} a_{il} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes a_{jm} \hat{\mathbf{e}}'_j \otimes a_{kn} \hat{\mathbf{e}}'_k \\ &= S_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes \hat{\mathbf{e}}'_j \otimes \hat{\mathbf{e}}'_k \\ &= S'_{ijk} \hat{\mathbf{e}}'_i \otimes \hat{\mathbf{e}}'_j \otimes \hat{\mathbf{e}}'_k \end{aligned} \quad (1.255)$$

concluyendo que las componentes del tensor de tercer orden en la nueva base $\hat{\mathbf{e}}'_i$ serán:

$$S'_{ijk} = S_{lmn} a_{il} a_{jm} a_{kn} \quad (1.256)$$

En forma general, las transformaciones de coordenadas de las componentes de tensores de primer, segundo, tercer y cuarto orden serán dadas respectivamente por:

orden	de $(x_1, x_2, x_3) \xrightarrow{a} (x'_1, x'_2, x'_3)$	de $(x'_1, x'_2, x'_3) \xrightarrow{a} (x_1, x_2, x_3)$
0 (escalar)	$\lambda' = \lambda$	$\lambda = \lambda'$
1 (vector)	$S'_i = a_{ij} S_j$	$S_i = a_{ji} S'_j$
2	$S'_{ij} = a_{ik} a_{jl} S_{kl}$	$S_{ij} = a_{ki} a_{lj} S'_{kl}$
3	$S'_{ijk} = a_{il} a_{jm} a_{kn} S_{lmn}$	$S_{ijk} = a_{li} a_{mj} a_{nk} S'_{lmn}$
4	$S'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} S_{mnpq}$	$S_{ijkl} = a_{mi} a_{nj} a_{pk} a_{ql} S'_{mnpq}$

Ejemplo 1.26: Obtener las componentes de la siguiente operación:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T$$

donde T_{ij} y a_{ij} son las componentes de los tensores \mathbf{T} y \mathbf{A} , respectivamente.

Si a_{ij} son las componentes de la matriz de transformación de base, hacer también la representación de las componentes de los tensores \mathbf{T} y \mathbf{T}' en sus respectivos sistemas.

Solución: La expresión $\mathbf{T}' = \mathbf{A} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{A}^T$ en notación simbólica queda:

$$\begin{aligned} T'_{ab}(\hat{\mathbf{e}}_a \otimes \hat{\mathbf{e}}_b) &= a_{rs}(\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_s) \cdot T_{pq}(\hat{\mathbf{e}}_p \otimes \hat{\mathbf{e}}_q) \cdot a_{kl}(\hat{\mathbf{e}}_l \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \\ &= a_{rs} T_{pq} a_{kl} \delta_{sp} \delta_{ql} (\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \\ &= a_{rp} T_{pq} a_{kq} (\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) \end{aligned}$$

Para obtener las componentes de \mathbf{T}' es suficiente hacer el doble producto escalar por la base $(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)$, resultando:

$$\begin{aligned} T'_{ab}(\hat{\mathbf{e}}_a \otimes \hat{\mathbf{e}}_b) : (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) &= a_{rp} T_{pq} a_{kq} (\hat{\mathbf{e}}_r \otimes \hat{\mathbf{e}}_k) : (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\ T'_{ab} \delta_{ai} \delta_{bj} &= a_{rp} T_{pq} a_{kq} \delta_{ri} \delta_{kj} \\ T'_{ij} &= a_{ip} T_{pq} a_{jq} \end{aligned}$$

Observemos que esta operación viene representada en forma matricial como:

$$\mathcal{T}' = \mathcal{A} \mathcal{T} \mathcal{A}^T$$

Si \mathcal{A} es la matriz de transformación de base se cumple que $\mathcal{A}^T = \mathcal{A}^{-1}$ luego, se cumple que $\mathcal{T} = \mathcal{A}^T \mathcal{T}' \mathcal{A}$, y la representación de las componentes se muestran en la Figura abajo:

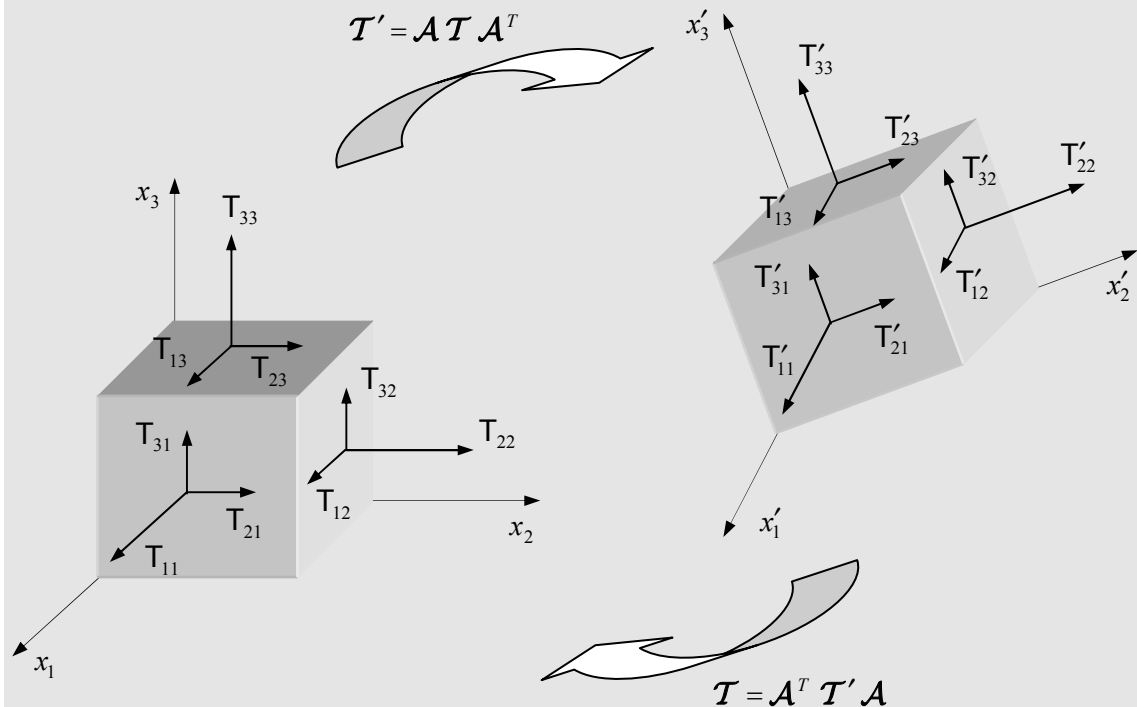


Figura 1.22: Ley de transformación de base.

Ejemplo 1.27: Probar que $I_{\mathbf{T}} = T_{ii}$ es un invariante bajo un cambio de base.

Solución: Considerando la ley de transformación para un tensor de segundo orden dado por (1.257), podemos decir que: $\mathbf{T}'_{ij} = a_{ik} a_{jl} \mathbf{T}_{kl}$. Luego, \mathbf{T}'_{ii} vendrá dado por:

$$\mathbf{T}'_{ii} = a_{ik} a_{il} \mathbf{T}_{kl} = \delta_{kl} \mathbf{T}_{kl} = \mathbf{T}_{kk} = I_{\mathbf{T}}$$

Lo que demuestra que $I_{\mathbf{T}}$ es un invariante.

Consideremos ahora cuatro sistemas de coordenadas (x_1, x_2, x_3) , (x'_1, x'_2, x'_3) , (x''_1, x''_2, x''_3) y (x'''_1, x'''_2, x'''_3) y así como las siguientes matrices de transformación, ver Figura 1.23:

A: matriz de transformación del sistema (x_1, x_2, x_3) al sistema (x'_1, x'_2, x'_3) ;

B: matriz de transformación del sistema (x'_1, x'_2, x'_3) al sistema (x''_1, x''_2, x''_3) ;

C: matriz de transformación del sistema (x''_1, x''_2, x''_3) al sistema (x'''_1, x'''_2, x'''_3) .

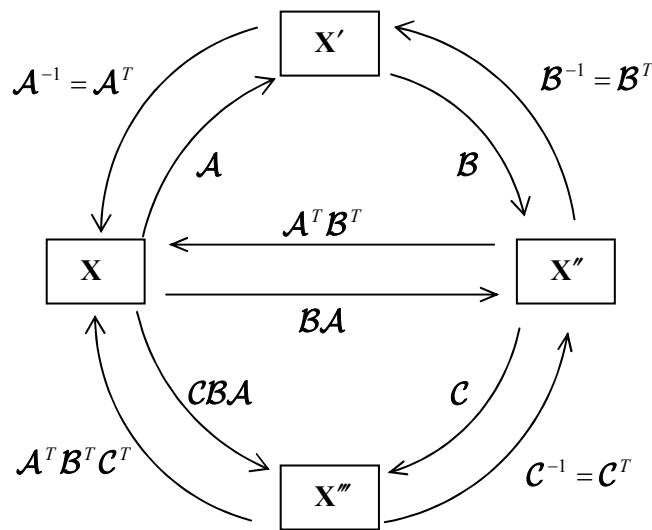


Figura 1.23: Matrices de transformación entre sistemas.

Si consideramos una matriz columna \mathbf{v} formada por las componentes del tensor de orden uno $\bar{\mathbf{v}}$ en el sistema (x_1, x_2, x_3) y las matrices de transformación **A**, **B**, **C**, podemos decir que las componentes de este vector en el sistema (x'_1, x'_2, x'_3) serán:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{A}\mathbf{v} \quad (1.258)$$

y su forma inversa

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{v}' \quad (1.259)$$

Las componentes de este vector en el sistema (x''_1, x''_2, x''_3) son:

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{B}\mathbf{v}' \quad (1.260)$$

y su forma inversa:

$$\mathbf{v}' = \mathbf{B}^T \mathbf{v}'' \quad (1.261)$$

Reemplazando la ecuación (1.258) en la ecuación (1.260) hallamos:

$$\mathbf{v}'' = \mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{v} \quad (1.262)$$

La matriz formada por \mathbf{BA} será la matriz de transformación (también ortogonal) del sistema (x_1, x_2, x_3) para el sistema (x_1'', x_2'', x_3'') , ver Figura 1.23. La forma inversa será obtenida reemplazando la ecuación (1.261) en la ecuación (1.259), resultando:

$$\mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{v}'' \quad (1.263)$$

Podríamos haber obtenido esta ecuación directamente de la ecuación (1.262)

$$\mathbf{v} = (\mathbf{BA})^{-1} \mathbf{v}'' = (\mathbf{BA})^T \mathbf{v}'' = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{v}'' \quad (1.264)$$

Análogamente, podemos obtener las componentes del vector en el sistema (x_1''', x_2''', x_3''') , ver Figura 1.23, como:

$$\mathbf{v}''' = \mathbf{CBA}\mathbf{v} \xrightarrow{\text{Forma inversa}} \mathbf{v} = \mathbf{A}^T \mathbf{B}^T \mathbf{C}^T \mathbf{v}''' \quad (1.265)$$

1.5.4.1 Transformada de Coordenadas en 2 Dimensiones

En el caso 2D tenemos como matriz de transformación de coordenadas una matriz con 4 componentes, donde dos son redundantes, y además las otras dos se pueden escribir en función de una única variable libre, α .

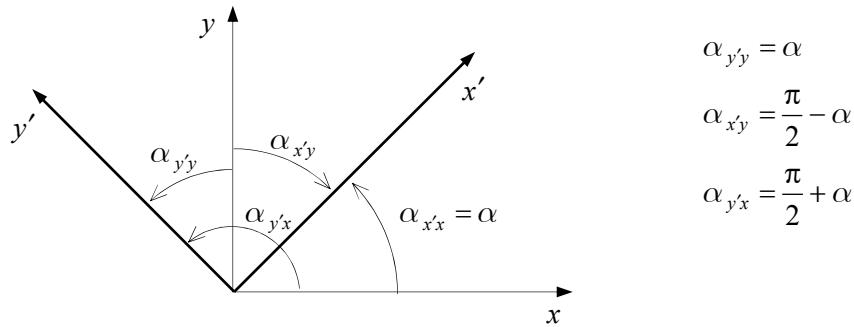


Figura 1.24: Transformación de sistema de coordenadas- 2D.

La transformación de coordenadas entre el sistema $x - y$ al sistema $x' - y'$ viene dada por la matriz \mathbf{A} , que es:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha_{x'x}) & \cos(\alpha_{x'y}) & 0 \\ \cos(\alpha_{y'x}) & \cos(\alpha_{y'y}) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (1.266)$$

cuya matriz \mathbf{A} es la matriz con los cosenos directores, ver Figura 1.24. Por relaciones trigonométricas podemos deducir que:

$$\alpha_{x'x} = \alpha_{y'y} \Rightarrow \cos(\alpha_{x'x}) = \cos(\alpha_{y'y}) = \cos(\alpha)$$

$$\cos(\alpha_{x'y}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin(\alpha) \quad (1.267)$$

$$\cos(\alpha_{y'x}) = \cos\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right) = -\sin(\alpha)$$

Quedando la matriz de transformación (en 2D) definida por:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \quad (1.268)$$

Como comprobación de esta transformación consideremos un vector posición del punto P dado por $\vec{\mathbf{r}}$, donde sus coordenadas son (x_P, y_P) en el sistema $x - y$, y las coordenadas del mismo punto en el sistema $x' - y'$ son (x'_P, y'_P) , ver Figura 1.25.

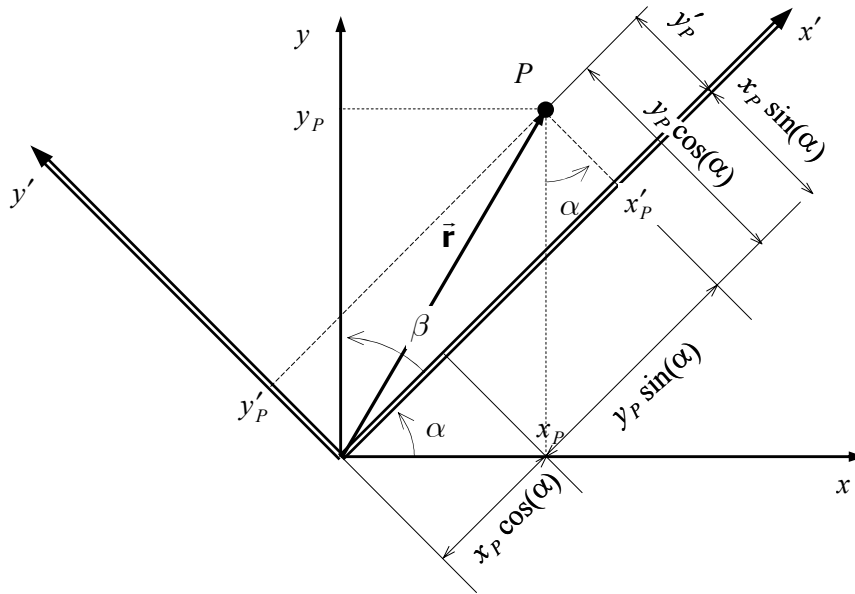


Figura 1.25: Transformación de sistema de coordenadas- 2D.

Podemos escribir que:

$$\begin{cases} x'_P = x_P \cos(\alpha) + y_P \cos(\beta) \\ y'_P = -x_P \cos(\beta) + y_P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x'_P = x_P \cos(\alpha) + y_P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) \\ y'_P = -x_P \cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) + y_P \cos(\alpha) \end{cases} \quad (1.269)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x'_P = x_P \cos(\alpha) + y_P \sin(\alpha) \\ y'_P = -x_P \sin(\alpha) + y_P \cos(\alpha) \end{cases}$$

En forma matricial:

$$\begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Forma Inversa}} \begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & \sin(\alpha) \\ -\sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix} \quad (1.270)$$

Como la matriz es ortonormal, su inversa es igual a su transpuesta, es decir, $\mathbf{A}^{-1} = \mathbf{A}^T$, luego la relación anterior puede ser reescrita como:

$$\begin{bmatrix} x_P \\ y_P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x'_P \\ y'_P \end{bmatrix} \quad (1.271)$$

Ejemplo 1.28: Encontrar la matriz de transformación del sistema (x, y, z) al sistema x''', y''', z''' , ver Figura 1.26:

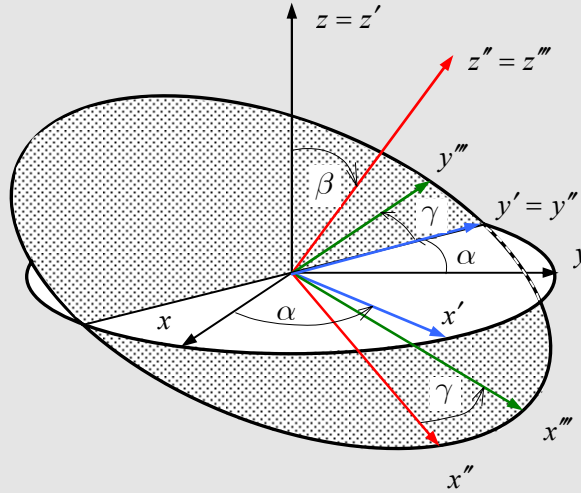
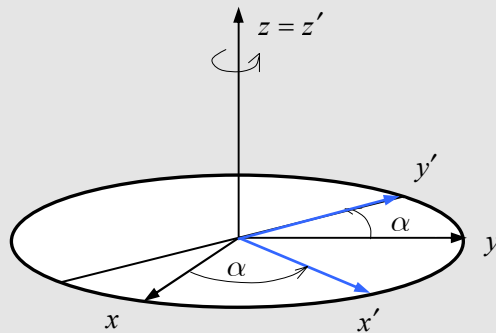


Figura 1.26: Rotación.

Solución: Podemos observar que la obtención del sistema x''', y''', z''' es una combinación de rotaciones mostradas a continuación:

◆ Rotación según eje z

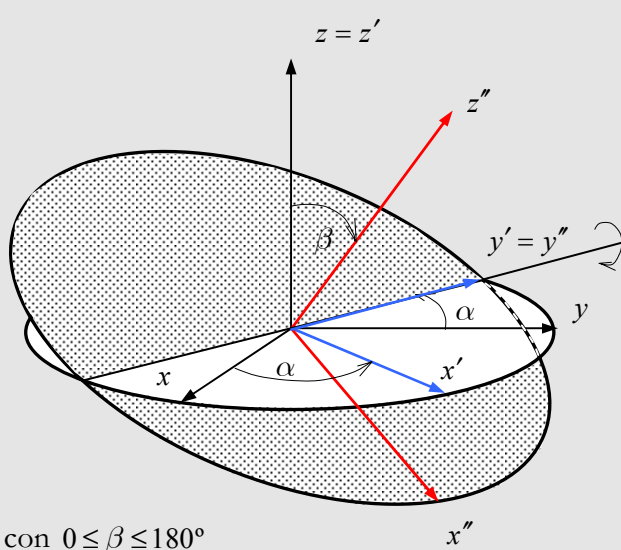


sistema x, y, z para x', y', z'

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $0 \leq \alpha \leq 360^\circ$

◆ Rotación según eje y'

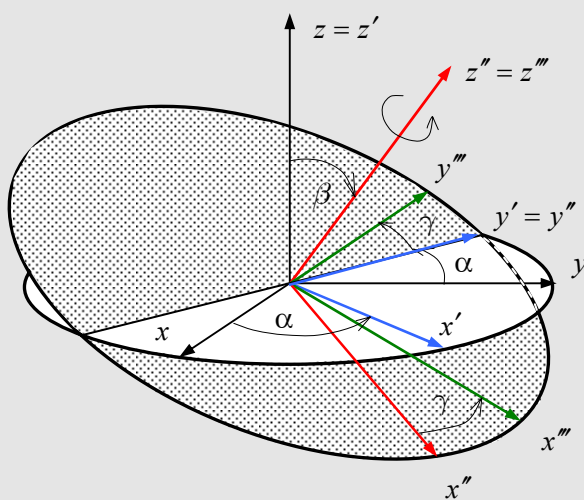


sistema x', y', z' para x'', y'', z''

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \cos \beta & 0 & -\sin \beta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin \beta & 0 & \cos \beta \end{bmatrix}$$

con $0 \leq \beta \leq 180^\circ$

◆ Rotación según eje z''



sistema x'', y'', z'' para x''', y''', z'''

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\sin \gamma & \cos \gamma & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

con $0 \leq \gamma \leq 360^\circ$

La matriz de transformación del sistema (x, y, z) para el sistema x''', y''', z''' , ver Figura 1.23, será dada por:

$$\mathbf{D} = \mathbf{CBA}$$

Resultando:

$$\mathbf{D} = \begin{bmatrix} (\cos \alpha \cos \beta \cos \gamma - \sin \alpha \sin \gamma) & (\sin \alpha \cos \beta \cos \gamma + \cos \alpha \sin \gamma) & -\sin \beta \cos \gamma \\ (-\cos \alpha \cos \beta \sin \gamma - \sin \alpha \cos \gamma) & (-\sin \alpha \cos \beta \sin \gamma + \cos \alpha \cos \gamma) & \sin \beta \sin \gamma \\ \cos \alpha \sin \beta & \sin \alpha \sin \beta & \cos \beta \end{bmatrix}$$

Los ángulos α, β, γ son conocidos como los *ángulos de Euler*.

Ejemplo 1.29: Consideremos que las componentes de un tensor de segundo orden \mathbf{T} , en el sistema de referencia (x_1, x_2, x_3) , están representadas por:

$$(\mathbf{T})_{ij} = T_{ij} = \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Sabiendo que la matriz de transformación de coordenadas del sistema (x_1, x_2, x_3) al sistema (x'_1, x'_2, x'_3) viene dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix}$$

Obtener las componentes del tensor T_{ij} en el nuevo sistema de coordenadas (x'_1, x'_2, x'_3) .

Solución: Como se definió en la ecuación (1.257), la ley de transformación para un tensor de segundo orden es:

$$T'_{ij} = a_{ik} a_{jl} T_{kl}$$

Para que la operación anterior sea posible en forma matricial:

$$T'_{ij} = \underbrace{[a_{ik}]} [T_{kl}] \underbrace{[a_{lj}]}^T$$

Luego:

$$\mathcal{T}' = \mathcal{A} \mathcal{T} \mathcal{A}^T$$

$$\mathcal{T}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{2}{\sqrt{2}} & \frac{2}{\sqrt{2}} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 2 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Efectuando la operación de matrices anterior obtenemos que:

$$\mathcal{T}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

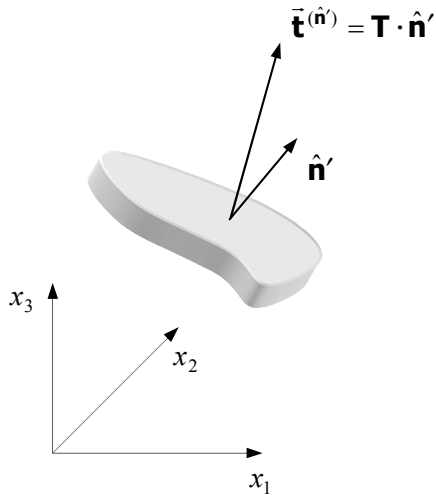
NOTA: Como podemos verificar en el ejemplo anterior las componentes del tensor \mathbf{T} en esta nueva base presenta una característica donde los términos fuera de la diagonal principal son nulos. La pregunta ahora es. ¿Dado un tensor \mathbf{T} , existe una transformación de base tal que las componentes fuera de la diagonal principal de este tensor sean nulos? Este tipo de problema es el denominado *problema de autovalor y autovector*. ■

1.5.5 Autovalores y Autovectores de un Tensor

Como hemos visto anteriormente, el producto escalar de un tensor de segundo orden \mathbf{T} con un vector (o un versor $\hat{\mathbf{n}}'$) resulta un vector, o dicho de otra manera, que la proyección de un tensor de segundo orden sobre una dirección resulta un vector que no necesariamente tiene la misma dirección de $\hat{\mathbf{n}}'$, ver Figura 1.27 (a).

El problema de autovalor y autovector consiste en encontrar una dirección $\hat{\mathbf{n}}$ tal que el vector proyección sobre esta dirección esté coincidente con la dirección $\hat{\mathbf{n}}$, ver Figura 1.27 (b).

a) Proyección de \mathbf{T} sobre un plano arbitrario.



b) Dirección principal.

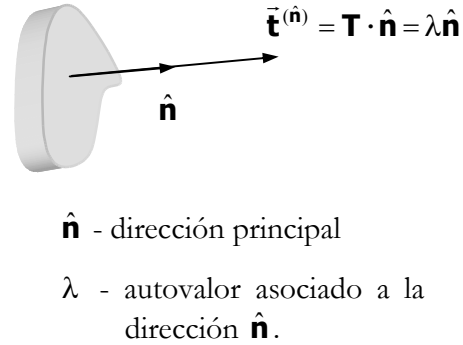


Figura 1.27: Proyección de un tensor sobre una dirección.

Luego, sea un tensor \mathbf{T} . Un vector $\hat{\mathbf{n}}$ se dice *autovector* de \mathbf{T} si existe un escalar λ , denominado *autovalor*, tal que:

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \lambda \hat{\mathbf{n}} \quad (1.272)$$

Si \mathbf{T} es un tensor de segundo orden, podemos escribir la ecuación (1.272) en componentes como:

$$\begin{aligned} T_{ij} \hat{n}_j &= \lambda \hat{n}_i \\ \Rightarrow T_{ij} \hat{n}_j - \lambda \hat{n}_i &= 0_i \\ \Rightarrow (T_{ij} - \lambda \delta_{ij}) \hat{n}_j &= 0_i \quad \xrightarrow{\text{Notación Tensorial}} (\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \vec{\mathbf{0}} \end{aligned} \quad (1.273)$$

donde 0_i son las componentes del vector nulo $\vec{\mathbf{0}}$. El conjunto de ecuaciones homogéneas anteriores sólo tendrá soluciones no triviales de $\hat{\mathbf{n}}$ (es decir, para $\hat{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$), ver **Ejemplo 1.24**, si y sólo si:

$$\det(\mathbf{T} - \lambda \mathbf{1}) = 0 \quad ; \quad |T_{ij} - \lambda \delta_{ij}| = 0 \quad (1.274)$$

que es el determinante característico del tensor \mathbf{T} , explícitamente dado por:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (1.275)$$

Desarrollando este determinante podemos obtener el *polinomio característico*, que está representado por una ecuación cúbica en λ :

$$\lambda^3 - \lambda^2 I_{\mathbf{T}} + \lambda II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} = 0 \quad (1.276)$$

donde $I_{\mathbf{T}}$, $II_{\mathbf{T}}$, $III_{\mathbf{T}}$ son los *invariantes principales* del tensor \mathbf{T} , definidos en función de sus componentes T_{ij} por:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= \text{Tr}(\mathbf{T}) = T_{ii} \\ II_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{2} \left[(\text{Tr} \mathbf{T})^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left\{ \text{Tr}(T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \text{Tr}(T_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) - \text{Tr} \left[(T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \cdot (T_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T_{ij} \delta_{ij} T_{kl} \delta_{kl} - T_{ij} T_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} \text{Tr}[(\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_l)] \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T_{ii} T_{kk} - T_{ij} T_{kl} \delta_{jk} \delta_{il} \right\} \\ &= \frac{1}{2} \left\{ T_{ii} T_{kk} - T_{ij} T_{ji} \right\} = M_{ii} = \text{Tr}[\text{cof}(\mathbf{T})] \end{aligned} \quad (1.277)$$

$$III_{\mathbf{T}} = \det(\mathbf{T}) = |T_{ij}| = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3}$$

donde M_{ii} es la misma matriz definida en la expresión (1.208), aunque sólo serán consideradas las de la diagonal principal: $M_{ii} = M_{11} + M_{22} + M_{33}$. También podemos expresar los invariantes como:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ II_{\mathbf{T}} &= \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} \\ &= T_{22} T_{33} - T_{23} T_{32} + T_{11} T_{33} - T_{13} T_{31} + T_{11} T_{22} - T_{12} T_{21} \\ III_{\mathbf{T}} &= T_{11} (T_{22} T_{33} - T_{32} T_{23}) - T_{12} (T_{21} T_{33} - T_{31} T_{23}) + T_{13} (T_{21} T_{32} - T_{31} T_{22}) \end{aligned} \quad (1.278)$$

Si \mathbf{T} es un tensor simétrico, los invariantes principales se resumen de la forma:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= T_{11} + T_{22} + T_{33} \\ II_{\mathbf{T}} &= T_{11} T_{22} + T_{11} T_{33} + T_{22} T_{33} - T_{12}^2 - T_{13}^2 - T_{23}^2 \\ III_{\mathbf{T}} &= T_{11} T_{22} T_{33} + T_{12} T_{13} T_{23} + T_{13} T_{12} T_{23} - T_{12}^2 T_{33} - T_{23}^2 T_{11} - T_{13}^2 T_{22} \end{aligned} \quad (1.279)$$

Una vez resuelto el polinomio característico obtendremos tres autovalores $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Si los tres autovalores son distintos $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$ tenemos tres direcciones principales únicas. Si $\lambda_1 = \lambda_2 \neq \lambda_3$ tenemos en este caso la dirección principal ($\hat{\mathbf{n}}^{(3)}$) correspondiente al autovalor λ_3 única y las otras dos pueden ser cualquiera mientras sean mutuamente ortogonales y a $\hat{\mathbf{n}}^{(3)}$. Si $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3$ cualquier dirección será una dirección principal. Cuando un tensor presenta los tres autovalores iguales lo denominamos de *Tensor Esférico*.

OBS.: Encontrar los autovalores (también conocidos como valores principales) es equivalente a encontrar unas direcciones principales (autovectores) tal que $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Además podemos decir que los autovectores constituyen una matriz de transformación entre el sistema original y el sistema formado por los autovalores.

Una vez obtenidos los autovectores, estos constituyen una base ortonormal denominado de *espacio principal*. En este espacio sólo tendremos componentes normales. Luego, las componentes del tensor en este espacio vienen representadas por:

$$\mathbf{T}'_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbb{T}_1 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbb{T}_2 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbb{T}_3 \end{bmatrix} \quad (1.280)$$

En este espacio (*espacio principal*), los invariantes pueden ser obtenidos como:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{T}} &= \mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_3 \\ II_{\mathbf{T}} &= \mathbb{T}_1\mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_2\mathbb{T}_3 + \mathbb{T}_1\mathbb{T}_3 \\ III_{\mathbf{T}} &= \mathbb{T}_1\mathbb{T}_2\mathbb{T}_3 \end{aligned} \quad (1.281)$$

Cuyos valores tienen que coincidir con los valores obtenidos en (1.278).

En el caso particular que el tensor sea esférico, es decir, $\mathbb{T}_1 = \mathbb{T}_2 = \mathbb{T}_3 = \mathbb{T}$, se cumple que $I_{\mathbf{T}}^2 = 3 II_{\mathbf{T}}$, $III_{\mathbf{T}} = \mathbb{T}^3$.

Dado un tensor antisimétrico \mathbf{W} , los invariantes principales vienen dados por:

$$\begin{aligned} I_{\mathbf{W}} &= 0 \\ II_{\mathbf{W}} &= \begin{vmatrix} 0 & W_{23} \\ -W_{23} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & W_{13} \\ -W_{13} & 0 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & W_{12} \\ -W_{12} & 0 \end{vmatrix} \\ &= W_{23}W_{23} + W_{13}W_{13} + W_{12}W_{12} \\ &= \omega^2 \\ III_{\mathbf{W}} &= 0 \end{aligned} \quad (1.282)$$

donde $\omega^2 = \|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w} = W_{23}^2 + W_{13}^2 + W_{12}^2$, ver expresión (1.132). Luego, la ecuación característica correspondiente a un tensor antisimétrico queda:

$$\begin{aligned} \lambda^3 - \lambda^2 I_{\mathbf{W}} + \lambda II_{\mathbf{W}} - III_{\mathbf{W}} &= 0 \\ \Rightarrow \lambda^3 + \omega^2 \lambda &= 0 \\ \Rightarrow \lambda(\lambda^2 + \omega^2) &= 0 \end{aligned} \quad (1.283)$$

Con lo cual comprobamos que por lo menos un autovalor es real e igual a cero, y dos posibles raíces imaginarias:

$$\lambda^2 + \omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = -\omega^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_{(1,2)} = \pm \omega \sqrt{-1} = \pm \omega i \quad (1.284)$$

1.5.5.1 Ortogonalidad de los Autovectores

Retomando la definición de autovalores dada por (1.272), si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ (con $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq \lambda_3$) son los autovalores del tensor de segundo orden \mathbf{T} luego, se cumple que:

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \quad ; \quad \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \quad \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \quad (1.285)$$

Podemos multiplicar la primera expresión por $\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ y a la segunda por $\hat{\mathbf{n}}^{(1)}$ resultando:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} &= \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} &= \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \end{aligned} \quad (1.286)$$

Ya que el tensor \mathbf{T} es simétrico se cumple que $\hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)}$ luego:

$$\lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \quad (1.287)$$

Siendo $\hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)}$, resulta que:

$$(\lambda_1 - \lambda_2) \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = 0 \quad (1.288)$$

Ya que $\lambda_1 \neq \lambda_2 \neq 0$, para satisfacer (1.288) se debe cumplir que:

$$\hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = 0 \quad (1.289)$$

Análogamente podemos demostrar que $\hat{\mathbf{n}}^{(1)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = 0$ y $\hat{\mathbf{n}}^{(2)} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = 0$. Con lo que demostramos que los autovectores son versores ortogonales entre sí, constituyendo así una base ortonormal, ver Figura 1.28, donde la matriz de transformación de base viene dada por:

$$\mathcal{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1^{(1)} & \hat{n}_2^{(1)} & \hat{n}_3^{(1)} \\ \hat{n}_1^{(2)} & \hat{n}_2^{(2)} & \hat{n}_3^{(2)} \\ \hat{n}_1^{(3)} & \hat{n}_2^{(3)} & \hat{n}_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (1.290)$$

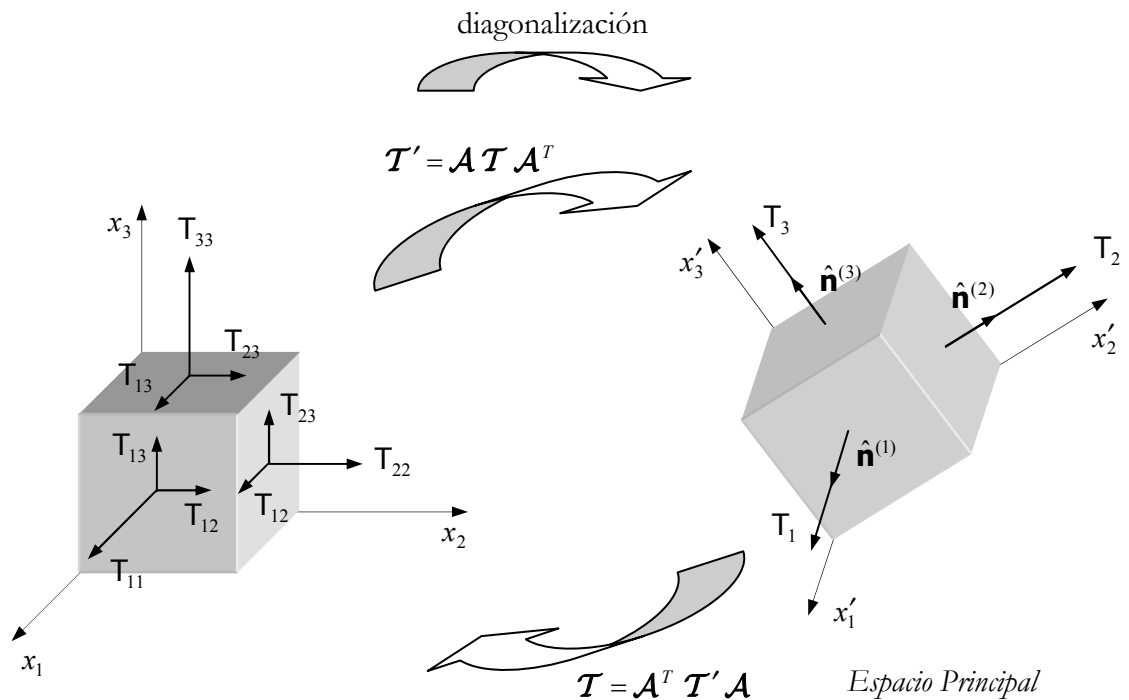


Figura 1.28: Diagonalización.

1.5.5.2 Invariantes

Los invariantes son aquellos que bajo un cambio de base mantiene su valor. El número de invariantes independientes (*invariantes principales*) de un tensor, depende del orden del tensor. Por ejemplo, en un tensor de segundo orden, el número de invariantes principales

es tres, véase ecuaciones (1.277). Cualquier otro invariante podrá ser representado como función de estos tres invariantes principales.

En dos dimensiones (2D) el número de invariantes principales se limita a dos:

$$I_{\mathbf{T}} = \text{Tr}(\mathbf{T}) = T_{ii}$$

$$III_{\mathbf{T}} = \det(\mathbf{T}) = |T_{ij}| = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} \quad (i, j, k = 1, 2) \quad (1.291)$$

Todo tensor de orden cero (escalar), (ej.: temperatura, presión, densidad) es un invariante.

Ejemplo 1.30: Demostrar que las siguientes relaciones son invariantes:

$$C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 \quad ; \quad C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 \quad ; \quad C_1^4 + C_2^4 + C_3^4$$

donde C_1, C_2, C_3 son los autovalores del tensor de segundo orden \mathbf{C} .

Solución:

Cualquier combinación de los invariantes principales será un invariante. Intentaremos expresar las relaciones anteriores en función de los invariantes principales.

Consideremos la siguiente relación:

$$I_C^2 = (C_1 + C_2 + C_3)^2 = C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 + 2 \underbrace{(C_1 C_2 + C_1 C_3 + C_2 C_3)}_{II_C}$$

$$\Rightarrow C_1^2 + C_2^2 + C_3^2 = I_C^2 - 2 II_C$$

Comprobando que $C_1^2 + C_2^2 + C_3^2$ es un invariante. Análogamente, podemos obtener que:

$$C_1^3 + C_2^3 + C_3^3 = I_C^3 - 3 II_C I_C + 3 III_C$$

$$C_1^4 + C_2^4 + C_3^4 = I_C^4 - 4 II_C I_C^2 + 4 III_C I_C + 2 II_C^2$$

Ejemplo 1.31: Demostrar que si \mathbf{Q} es un tensor de segundo orden ortogonal propio, y \mathbf{E} es un tensor de segundo orden, los autovalores de \mathbf{E} no cambian con la transformación:

$$\mathbf{E}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T$$

Solución:

Los autovalores (λ_i) del tensor \mathbf{E} obtenemos a partir del determinante característico:

$$\begin{aligned} 0 &= \det(\mathbf{E}^* - \lambda \mathbf{1}) & \left| \right. & 0 = \det(\mathbf{E}_{ij}^* - \lambda \delta_{ij}) \\ &= \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T - \lambda \mathbf{1}) & & = \det(\mathbf{Q}_{ik} \mathbf{E}_{kp} \mathbf{Q}_{jp} - \lambda \delta_{ij}) \\ &= \det(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{E} \cdot \mathbf{Q}^T - \mathbf{Q} \cdot \lambda \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^T) & & = \det(\mathbf{Q}_{ik} \mathbf{E}_{kp} \mathbf{Q}_{jp} - \lambda \mathbf{Q}_{ik} \mathbf{Q}_{jp} \delta_{kp}) \\ &= \det[\mathbf{Q} \cdot (\mathbf{E} - \lambda \mathbf{1}) \cdot \mathbf{Q}^T] & & = \det[\mathbf{Q}_{ik} (\mathbf{E}_{kp} - \lambda \delta_{kp}) \mathbf{Q}_{jp}] \\ &= \underbrace{\det(\mathbf{Q})}_{1} \det(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{1}) \underbrace{\det(\mathbf{Q}^T)}_{1} & & = (\mathbf{Q}_{ik}) \det(\mathbf{E}_{kp} - \lambda \delta_{kp}) \det(\mathbf{Q}_{jp}) \\ &= \det(\mathbf{E} - \lambda \mathbf{1}) & & = \det(\mathbf{E}_{kp} - \lambda \delta_{kp}) \end{aligned}$$

Con lo que comprobamos que \mathbf{E} y \mathbf{E}^* tienen los mismos autovalores.

1.5.5.3 Solución de Ecuación Cúbica

Si un tensor \mathbf{T} es *simétrico* podemos demostrar que las raíces de la ecuación característica $(\lambda^3 - \lambda^2 I_{\mathbf{T}} + \lambda II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} = 0)$ serán todas raíces reales, definidas de la forma:

$$\begin{aligned}\lambda_1 &= 2S \left[\cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) \right] + \frac{I_{\mathbf{T}}}{3} \\ \lambda_2 &= 2S \left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_{\mathbf{T}}}{3} \\ \lambda_3 &= 2S \left[\cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \right] + \frac{I_{\mathbf{T}}}{3}\end{aligned}\quad (1.292)$$

con

$$R = \frac{I_{\mathbf{T}}^2 - 3II_{\mathbf{T}}}{3}; \quad S = \sqrt{\frac{R}{3}}; \quad Q = \frac{I_{\mathbf{T}} II_{\mathbf{T}}}{3} - III_{\mathbf{T}} - \frac{2I_{\mathbf{T}}^3}{27}; \quad T = \sqrt{\frac{R^3}{27}}; \quad \alpha = \arccos\left(-\frac{Q}{2T}\right)$$

con α en radianes.

$$(1.293)$$

Ya que $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores del tensor \mathbf{T} luego, podemos reestructurar la solución como:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\frac{I_{\mathbf{T}}}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\text{Parte Esférica}} + 2S \underbrace{\begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\alpha}{3}\right) & 0 & 0 \\ 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{2\pi}{3}\right) & 0 \\ 0 & 0 & \cos\left(\frac{\alpha}{3} + \frac{4\pi}{3}\right) \end{bmatrix}}_{\text{Parte Desviadora}} \quad (1.294)$$

Observemos que si \mathbf{T} es esférico se cumple que $I_{\mathbf{T}}^2 = 3II_{\mathbf{T}}$ luego, $S = 0$.

Ejemplo 1.32: Determinar los valores principales y las direcciones principales del tensor cartesiano de segundo orden \mathbf{T} , cuyas componentes se representan matricialmente por:

$$(\mathbf{T})_{ij} = T_{ij} = \mathcal{T} = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Solución: Buscamos soluciones no triviales para $(T_{ij} - \lambda\delta_{ij})n_j = 0_i$, con la restricción de que $n_j n_j = 1$. Como ya hemos visto, la solución no trivial requiere la condición:

$$|T_{ij} - \lambda\delta_{ij}| = 0$$

Explícitamente, la expresión anterior queda:

$$\begin{vmatrix} T_{11} - \lambda & T_{12} & T_{13} \\ T_{21} & T_{22} - \lambda & T_{23} \\ T_{31} & T_{32} & T_{33} - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Desarrollando el determinante anterior obtenemos la ecuación cúbica:

$$(1 - \lambda)[(3 - \lambda)^2 - 1] = 0$$

$$\lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

Podríamos haber obtenido directamente la ecuación característica anterior a través de los invariantes:

$$I_{\mathbf{T}} = \text{Tr}(\mathbf{T}_{ij}) = T_{ii} = T_{11} + T_{22} + T_{33} = 7$$

$$II_{\mathbf{T}} = \frac{1}{2}(T_{ii}T_{jj} - T_{ij}T_{ji}) = \begin{vmatrix} T_{22} & T_{23} \\ T_{32} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{13} \\ T_{31} & T_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11} & T_{12} \\ T_{21} & T_{22} \end{vmatrix} = 14$$

$$III_{\mathbf{T}} = |T_{ij}| = \epsilon_{ijk} T_{i1} T_{j2} T_{k3} = 8$$

Luego, utilizando la ecuación (1.276), la ecuación característica será:

$$\lambda^3 - \lambda^2 I_{\mathbf{T}} + \lambda II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda^3 - 7\lambda^2 + 14\lambda - 8 = 0$$

Resolviendo la ecuación cúbica podemos obtener las tres raíces reales, puesto que la matriz \mathbf{T} es simétrica:

$$\lambda_1 = 1; \quad \lambda_2 = 2; \quad \lambda_3 = 4$$

Podemos además comprobar si los invariantes están bien calculados utilizando la expresión de los invariantes en función de los autovalores:

$$I_{\mathbf{T}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 1 + 2 + 4 = 7 \quad \checkmark$$

$$II_{\mathbf{T}} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1 = 1 \times 2 + 2 \times 4 + 4 \times 1 = 14 \quad \checkmark$$

$$III_{\mathbf{T}} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3 = 8 \quad \checkmark$$

Con lo que podemos comprobar que los invariantes son los mismos que los obtenidos anteriormente.

Cálculo de las direcciones principales:

Para obtener las direcciones principales, utilizamos la ecuación (1.273), donde cada autovalor λ_i está asociado a un autovector $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$.

♦ Para $\lambda_1 = 1$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda_1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 1 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

resultando el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left. \begin{cases} 2n_1 - n_2 = 0 \\ -n_1 + 2n_2 = 0 \\ 0n_3 = 0 \end{cases} \right\} \Rightarrow n_1 = n_2 = 0$$

$$n_i n_i = n_1^2 + n_2^2 + n_3^2 = 1$$

Luego, podemos obtener que: $\lambda_1 = 1 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = [0 \ 0 \ \pm 1]$.

NOTA: Esta solución podría haberse determinado previamente por la situación particular que presentan las componentes del tensor. Al ser los términos $T_{13} = T_{23} = T_{31} = T_{32} = 0$, $T_{33} = 1$ ya es un valor principal, como consecuencia esta dirección ya es una dirección principal. ■

Para $\lambda_2 = 2$

$$\begin{bmatrix} 3 - \lambda_2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 - 2 & -1 & 0 \\ -1 & 3 - 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 - 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} \mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 0 \Rightarrow \mathbf{n}_1 = \mathbf{n}_2 \\ -\mathbf{n}_1 + \mathbf{n}_2 = 0 \\ -\mathbf{n}_3 = 0 \end{cases}$$

Podemos observar que las dos primeras ecuaciones son linealmente dependientes. Necesitamos entonces de una ecuación adicional:

$$\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 = 1 \Rightarrow 2\mathbf{n}_1^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{n}_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Luego:

$$\lambda_2 = 2 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda_3 = 4$

$$\begin{bmatrix} 3-\lambda_3 & -1 & 0 \\ -1 & 3-\lambda_3 & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3-4 & -1 & 0 \\ -1 & 3-4 & 0 \\ 0 & 0 & 1-4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{cases} -\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 0 \\ -\mathbf{n}_1 - \mathbf{n}_2 = 0 \\ -3\mathbf{n}_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \mathbf{n}_2 = -\mathbf{n}_1$$

$$\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{n}_3^2 = 1 \Rightarrow 2\mathbf{n}_1^2 = 1 \Rightarrow \mathbf{n}_1 = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

Resultando:

$$\lambda_3 = 4 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \mp\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

Podemos entonces resumir que las direcciones principales correspondientes a sus valores principales son:

$$\lambda_1 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = [0 \ 0 \ \pm 1]$$

$$\lambda_2 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_3 \Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = \begin{bmatrix} \pm\sqrt{\frac{1}{2}} & \mp\sqrt{\frac{1}{2}} & 0 \end{bmatrix}$$

NOTA: Las componentes del tensor en el sistema de coordenadas original (x_1, x_2, x_3) es el mismo del **Ejemplo 1.29**. Los autovalores obtenidos fueron $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$ y $\lambda_3 = 4$ y la matriz de transformación \mathcal{A} está constituida por los autovectores de \mathbf{T} . Luego, podemos concluir que los autovectores constituyen una base de transformación del sistema (x_1, x_2, x_3) para el sistema (x'_1, x'_2, x'_3) formado por los ejes principales ■

1.5.6 Representación Espectral de un Tensor

De la solución de la ecuación (1.276) obtenemos tres autovalores: λ_1 , λ_2 , λ_3 . Cada autovalor estará asociado a un autovector, es decir:

$$\begin{aligned} \text{para } \lambda_1 &\Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(1)} = [\hat{n}_1^{(1)} \quad \hat{n}_2^{(1)} \quad \hat{n}_3^{(1)}] \\ \text{para } \lambda_2 &\Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(2)} = [\hat{n}_1^{(2)} \quad \hat{n}_2^{(2)} \quad \hat{n}_3^{(2)}] \\ \text{para } \lambda_3 &\Rightarrow \hat{\mathbf{n}}^{(3)} = [\hat{n}_1^{(3)} \quad \hat{n}_2^{(3)} \quad \hat{n}_3^{(3)}] \end{aligned} \quad (1.295)$$

En el espacio principal, cuyas bases están formadas por los autovectores $\hat{\mathbf{n}}^{(1)}$, $\hat{\mathbf{n}}^{(2)}$, $\hat{\mathbf{n}}^{(3)}$, el tensor \mathbf{T} tendrá como componentes una matriz diagonal formada por los autovalores:

$$\mathbf{T}'_{ij} = \mathbf{T}' = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.296)$$

Con invariantes principales: $I_{\mathbf{T}} = \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3$, $II_{\mathbf{T}} = \lambda_1\lambda_2 + \lambda_2\lambda_3 + \lambda_3\lambda_1$, $III_{\mathbf{T}} = \lambda_1\lambda_2\lambda_3$.

Sabiendo que los autovectores forman una base de transformación tal que:

$$\mathbf{T}' = \mathbf{A} \mathbf{T} \mathbf{A}^T \quad (1.297)$$

luego, la forma inversa será:

$$\mathbf{T} = \mathbf{A}^T \mathbf{T}' \mathbf{A} \quad (1.298)$$

donde

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \\ \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{n}_1^{(1)} & \hat{n}_2^{(1)} & \hat{n}_3^{(1)} \\ \hat{n}_1^{(2)} & \hat{n}_2^{(2)} & \hat{n}_3^{(2)} \\ \hat{n}_1^{(3)} & \hat{n}_2^{(3)} & \hat{n}_3^{(3)} \end{bmatrix} \quad (1.299)$$

Explícitamente, la relación (1.298) queda:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \hat{n}_1^{(1)} & \hat{n}_1^{(2)} & \hat{n}_1^{(3)} \\ \hat{n}_2^{(1)} & \hat{n}_2^{(2)} & \hat{n}_2^{(3)} \\ \hat{n}_3^{(1)} & \hat{n}_3^{(2)} & \hat{n}_3^{(3)} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{n}_1^{(1)} & \hat{n}_2^{(1)} & \hat{n}_3^{(1)} \\ \hat{n}_1^{(2)} & \hat{n}_2^{(2)} & \hat{n}_3^{(2)} \\ \hat{n}_1^{(3)} & \hat{n}_2^{(3)} & \hat{n}_3^{(3)} \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \mathbf{A} \\ &= \lambda_1 \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \lambda_2 \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathbf{A} + \lambda_3 \mathbf{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathbf{A} \end{aligned} \quad (1.300)$$

y considerando que:

$$\begin{aligned}
\mathcal{A}^T \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \\ \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \\ \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(1)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(1)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{n}}_i^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(1)}} \\
\mathcal{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \mathcal{A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \\ \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \\ \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(2)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(2)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{n}}_i^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(2)}} \\
\mathcal{A}^T \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \mathcal{A} &= \underbrace{\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \\ \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \\ \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_1^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_2^{(3)} & \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_3^{(3)} \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{n}}_i^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(3)}}
\end{aligned} \tag{1.301}$$

Luego, podemos representar las componentes de un tensor de segundo orden en función de sus valores principales y autovectores como:

$$T_{ij} = \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}_i^{(1)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(1)} + \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}_i^{(2)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(2)} + \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}_i^{(3)} \hat{\mathbf{n}}_j^{(3)} \tag{1.302}$$

o en notación tensorial como:

$$\mathbf{T} = \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \tag{1.303}$$

o también

$$\boxed{\mathbf{T} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)}} \quad \text{Representación espectral de un tensor de segundo orden} \tag{1.304}$$

que es la denominada *representación espectral* del tensor. Observemos que en la expresión anterior tenemos que recurrir al símbolo de suma ya que el índice aparece tres veces en la expresión.

NOTA: La representación espectral (1.304) podría haber sido obtenida fácilmente partiendo de la definición del tensor identidad dada por (1.166), $\mathbf{1} = \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i$, donde $\{\hat{\mathbf{n}}_1, \hat{\mathbf{n}}_2, \hat{\mathbf{n}}_3\}$ constituye una base ortonormal. Podemos también representar $\mathbf{1} = \hat{\mathbf{n}}_i \otimes \hat{\mathbf{n}}_i$ a

través del símbolo de suma como $\mathbf{1} = \sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)}$. Luego, se cumple que:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{T} \cdot \left(\sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \right) = \sum_{a=1}^3 \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \tag{1.305}$$

donde hemos utilizado la definición de autovalor y autovector $\mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)}$. ■

Consideremos un tensor ortogonal \mathbf{R} cuya transformación ortogonal aplicada al versor original $\hat{\mathbf{N}}$ transforma en el versor $\hat{\mathbf{n}}$, es decir, $\hat{\mathbf{n}} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}$. Podemos entonces hacer la representación espectral de un tensor ortogonal como:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{R} \cdot \left(\sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \right) = \sum_{a=1}^3 \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \quad (1.306)$$

En el espacio de las direcciones principales, la potencia de tensores podemos expresarla como:

$$\left(\mathbf{T}^n \right)_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1^n & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2^n & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3^n \end{bmatrix} \quad (1.307)$$

Luego, la representación espectral del tensor \mathbf{T}^n será:

$$\mathbf{T}^n = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^n \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad (1.308)$$

Por ejemplo, si queremos calcular la raíz cuadrada del tensor \mathbf{T} , podemos fácilmente obtener a través de la representación espectral:

$$\sqrt{\mathbf{T}} = \sum_{a=1}^3 \sqrt{\lambda_a} \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad (1.309)$$

Consideremos un tensor semi-definido positivo (\mathbf{T}), luego hay que cumplir $\bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq 0$ para todo $\bar{\mathbf{x}} \neq \bar{\mathbf{0}}$. Aplicando la representación espectral obtenemos que:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{x}} \cdot \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{x}} &\geq 0 \\ \Rightarrow \bar{\mathbf{x}} \cdot \left(\sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \right) \cdot \bar{\mathbf{x}} &\geq 0 \\ \Rightarrow \sum_{a=1}^3 \lambda_a \bar{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \bar{\mathbf{x}} &\geq 0 \end{aligned} \quad (1.310)$$

Observemos que el resultado de la operación $(\bar{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)})$ es un escalar con lo cual podemos escribir que:

$$\sum_{a=1}^3 \lambda_a \bar{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \bar{\mathbf{x}} \geq 0 \quad \Rightarrow \quad \sum_{a=1}^3 \lambda_a \underbrace{(\bar{\mathbf{x}} \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)})^2}_{>0} \geq 0 \quad (1.311)$$

Con lo cual demostramos que si un tensor es semi-definido positivo eso implica que sus autovalores son mayores o igual a cero, $\lambda_1 \geq 0$, $\lambda_2 \geq 0$, $\lambda_3 \geq 0$. Concluimos también que, un tensor será definido positivo si y solo si sus autovalores son positivos y distintos de cero, es decir, $\lambda_1 > 0$, $\lambda_2 > 0$, $\lambda_3 > 0$. Como consecuencia la traza de un tensor definido positivo es mayor que cero. Si la traza de un tensor definido positivo es igual a cero, eso implica que el tensor es el tensor nulo.

1.5.7 Teorema de Cayley-Hamilton

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que cualquier tensor \mathbf{T} satisface su propia ecuación característica, es decir, si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los autovalores de \mathbf{T} , podemos escribir:

$$(\mathbf{T})_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix} \quad (1.312)$$

Y si estos autovalores satisfacen la ecuación: $\lambda^3 - \lambda^2 I_{\mathbf{T}} + \lambda II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} = 0$, el tensor \mathbf{T} también la satisface, es decir:

$$\mathbf{T}^3 - \mathbf{T}^2 I_{\mathbf{T}} + \mathbf{T} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (1.313)$$

Una aplicación del teorema de Cayley-Hamilton es expresar la potencia de tensores \mathbf{T}^n como una combinación de \mathbf{T}^{n-1} , \mathbf{T}^{n-2} , \mathbf{T}^{n-3} . Si queremos obtener \mathbf{T}^4 queda:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^3 \cdot \mathbf{T} - \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{T} I_{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} \cdot \mathbf{T} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{T}^4 &= \mathbf{T}^3 I_{\mathbf{T}} - \mathbf{T}^2 II_{\mathbf{T}} + III_{\mathbf{T}} \mathbf{T} \end{aligned} \quad (1.314)$$

Utilizando el teorema de Cayley-Hamilton podemos expresar el tercer invariante en función de las trazas, que será útil a la hora de obtener las derivadas parciales de los invariantes. Según el teorema de Cayley-Hamilton sigue siendo válida la expresión:

$$\mathbf{T}^3 - I_{\mathbf{T}} \mathbf{T}^2 + II_{\mathbf{T}} \mathbf{T} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (1.315)$$

Haciendo el doble producto escalar con el tensor identidad de segundo orden ($\mathbf{1}$), la expresión queda:

$$\mathbf{T}^3 : \mathbf{1} - I_{\mathbf{T}} \mathbf{T}^2 : \mathbf{1} + II_{\mathbf{T}} \mathbf{T} : \mathbf{1} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} : \mathbf{1} = \mathbf{0} : \mathbf{1} \quad (1.316)$$

Como ya se hemos visto anteriormente las siguientes relaciones son válidas $\mathbf{T}^3 : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{T}^3)$, $\mathbf{T}^2 : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{T}^2)$, $\mathbf{T} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{T})$, $\mathbf{1} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{1}) = 3$, $\mathbf{0} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\mathbf{0}) = 0$. Reemplazando en la ecuación (1.316) obtenemos:

$$\begin{aligned} \text{Tr}(\mathbf{T}^3) - I_{\mathbf{T}} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) + II_{\mathbf{T}} \text{Tr}(\mathbf{T}) - III_{\mathbf{T}} \underbrace{\text{Tr}(\mathbf{1})}_{=3} &= 0 \\ III_{\mathbf{T}} &= \frac{1}{3} [\text{Tr}(\mathbf{T}^3) - I_{\mathbf{T}} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) + II_{\mathbf{T}} \text{Tr}(\mathbf{T})] \end{aligned} \quad (1.317)$$

Reemplazando los valores de los invariantes $I_{\mathbf{T}}$, $II_{\mathbf{T}}$, dados por la ecuación (1.277), obtenemos:

$$III_{\mathbf{T}} = \frac{1}{3} \left\{ \text{Tr}(\mathbf{T}^3) - \frac{3}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \text{Tr}(\mathbf{T}) + \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^3 \right\} \quad (1.318)$$

Ejemplo 1.33: Partiendo del teorema de Cayley-Hamilton obtener la inversa de un tensor \mathbf{T} en función de potencia de tensores.

Solución:

El teorema de Cayley-Hamilton afirma que:

$$\mathbf{T}^3 - \mathbf{T}^2 I_{\mathbf{T}} + \mathbf{T} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

Haciendo el producto escalar de la expresión anterior por el tensor \mathbf{T}^{-1} obtenemos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^3 \cdot \mathbf{T}^{-1} - \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{T}^{-1} I_{\mathbf{T}} + \mathbf{T} \cdot \mathbf{T}^{-1} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} \cdot \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{0} \cdot \mathbf{T}^{-1} \\ \mathbf{T}^2 - \mathbf{T} I_{\mathbf{T}} + \mathbf{1} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{T}^{-1} &= \frac{1}{III_{\mathbf{T}}} (\mathbf{T}^2 - \mathbf{T} I_{\mathbf{T}} + \mathbf{1} II_{\mathbf{T}}) \end{aligned}$$

El teorema de Cayley-Hamilton también es válido para matrices cuadradas de orden n . Sea una matriz cuadrada $\mathcal{A}_{n \times n}$ el determinante característico viene dado por:

$$|\lambda \mathbf{1}_{n \times n} - \mathcal{A}| = 0 \quad (1.319)$$

donde $\mathbf{1}_{n \times n}$ es la matriz identidad. Desarrollando el determinante obtenemos:

$$\lambda^n - I_1 \lambda^{n-1} + I_2 \lambda^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n = 0 \quad (1.320)$$

donde I_1, I_2, \dots, I_n son los invariantes de la matriz \mathcal{A} . Para el caso particular $n=3$ y si \mathcal{A} representa las componentes del tensor \mathbf{A} tenemos que: $I_1 = I_{\mathbf{A}}$, $I_2 = II_{\mathbf{A}}$, $I_3 = III_{\mathbf{A}}$. Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton se cumple que

$$\mathcal{A}^n - I_1 \mathcal{A}^{n-1} + I_2 \mathcal{A}^{n-2} - \dots + (-1)^n I_n \mathbf{1} = \mathbf{0} \quad (1.321)$$

A través de la relación (1.321) podemos obtener la inversa de la matriz $\mathcal{A}_{n \times n}$, por ello multiplicando todos los términos por \mathcal{A}^{-1} , resultando:

$$\begin{aligned} \mathcal{A}^n \mathcal{A}^{-1} - I_1 \mathcal{A}^{n-1} \mathcal{A}^{-1} + I_2 \mathcal{A}^{n-2} \mathcal{A}^{-1} - \dots + (-1)^n I_n \mathbf{1} \mathcal{A}^{-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathcal{A}^{n-1} - I_1 \mathcal{A}^{n-2} + I_2 \mathcal{A}^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} \mathbf{1} + (-1)^n I_n \mathcal{A}^{-1} &= \mathbf{0} \end{aligned} \quad (1.322)$$

luego

$$\mathcal{A}^{-1} = \frac{(-1)^{n-1}}{I_n} (\mathcal{A}^{n-1} - I_1 \mathcal{A}^{n-2} + I_2 \mathcal{A}^{n-3} - \dots + (-1)^{n-1} I_{n-1} \mathbf{1}) \quad (1.323)$$

El invariante $I_n = \det(\mathcal{A})$ luego, sólo habrá la inversa de \mathcal{A} si $I_n = \det(\mathcal{A}) \neq 0$.

Ejemplo 1.34: Dado el tensor \mathbf{T} representado por sus componentes en el sistema cartesiano:

$$\mathcal{T} = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Comprobar el teorema de Cayley-Hamilton.

Solución:

El teorema de Cayley-Hamilton también se aplica para las componentes del tensor:

$$\mathcal{T}^3 - \mathcal{T}^2 I_{\mathbf{T}} + \mathcal{T} II_{\mathbf{T}} - III_{\mathbf{T}} \mathbf{1} = \mathbf{0}$$

donde:

$$I_{\mathbf{T}} = 5 + 2 + 1 = 8$$

$$II_{\mathbf{T}} = 10 + 2 + 5 = 17$$

$$III_{\mathbf{T}} = 10$$

luego:

$$\mathbf{T}^3 = \begin{bmatrix} 5^3 & 0 & 0 \\ 0 & 2^3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad ; \quad \mathbf{T}^2 = \begin{bmatrix} 5^2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Aplicando el teorema de Cayley-Hamilton verificamos que:

$$\begin{bmatrix} 125 & 0 & 0 \\ 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 8 \begin{bmatrix} 25 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + 17 \begin{bmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} - 10 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad c.q.d.$$

1.5.8 Elipsoide del Tensor

Cuando \mathbf{T}_{ij} es simétrico los autovalores de \mathbf{T} serán reales y cuando λ_1 , λ_2 y λ_3 son todos distintos los autovectores son mutuamente perpendiculares y podemos decir:

$$\mathbf{T}_{ij}x_i x_j \Rightarrow \lambda_1 x_1^2 + \lambda_2 x_2^2 + \lambda_3 x_3^2 = 1 \quad (1.324)$$

lo cual representa una superficie en el espacio \mathbb{R}^3 . Esta superficie podrá ser un elipsoide, un hiperboloide o un paraboloide, dependiendo del valor de λ_i . Si todos son positivos, la superficie será un elipsoide de longitud del semieje dada por:

$$a_i = \frac{1}{\sqrt{\lambda_i}} \quad (i=1,2,3) \quad (1.325)$$

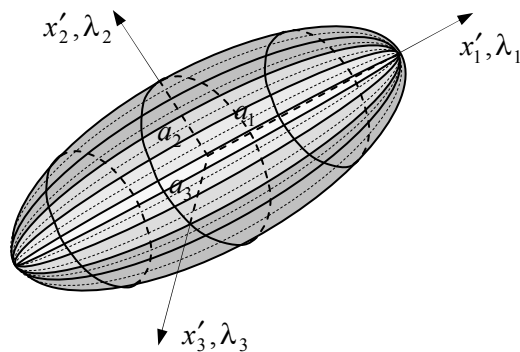


Figura 1.29: Elipsoide.

Observar que cuando los tres autovalores son iguales la superficie será una esfera. Por eso, los tensores que presentan esta característica se denominan *Tensores Esféricos*, y cualquier dirección será una dirección principal.

1.5.9 Tensor Isótropo y Anisótropo

Un tensor se denomina *isótropo* cuando sus componentes son las mismas en cualquier sistema de coordenadas, en caso contrario el tensor será *anisótropo*.

Consideremos las componentes de un tensor \mathbf{T} representadas en forma matricial por \mathcal{T} en un sistema de referencia y las componentes del mismo tensor en otro sistema de referencia \mathcal{T}' . Un tensor se dice isótropo cuando cumple que:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' \quad (1.326)$$

Tensor Isótropo de orden uno

Consideremos un vector $\bar{\mathbf{v}}$ representado por sus componentes $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3$ en el sistema de coordenadas x_1, x_2, x_3 . La representación de estas componentes en un nuevo sistema de coordenadas x'_1, x'_2, x'_3 será $\mathbf{v}'_1, \mathbf{v}'_2, \mathbf{v}'_3$, por lo que es válido decir:

$$\bar{\mathbf{v}} = v_i \hat{\mathbf{e}}_i = v'_j \hat{\mathbf{e}}'_j \quad \Rightarrow \quad v'_i = a_{ij} v_j \quad (1.327)$$

Para que $\bar{\mathbf{v}}$ sea isótropo por definición tiene que cumplir $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i$ y eso sólo será posible si $\hat{\mathbf{e}}_i = \hat{\mathbf{e}}'_i$ (no hubo cambio de sistema) o $\mathbf{v}_i = \mathbf{v}'_i = \mathbf{0}_i$. Luego, el único tensor de orden uno isótropo es el vector nulo $\bar{\mathbf{0}}$.

Tensor Isótropo de segundo orden

Un ejemplo de un tensor isótropo de segundo orden es el tensor identidad $\mathbf{1}$, representado por sus componentes por δ_{kl} . Utilizando la transformación de coordenadas para las componentes de un tensor de segundo orden obtenido en (1.256), se demuestra que:

$$\begin{aligned} \delta'_{ij} &= a_{ik} a_{jl} \delta_{kl} \\ &= \underbrace{a_{ik} a_{jk}} \\ &= \mathbf{A} \mathbf{A}^T = \mathbf{1} \\ &= \delta_{ij} \end{aligned} \quad (1.328)$$

Tensor Isótropo de tercer orden

Un ejemplo de un tensor (pseudo) isótropo de orden tres es el pseudo-tensor Levi-Civita, definido en (1.179) cuyas componentes son ϵ_{lmn} . Aplicando la ley de transformación de coordenadas (1.256), resulta:

$$\begin{aligned} \epsilon'_{ijk} &= a_{il} a_{jm} a_{kn} \epsilon_{lmn} \\ &= \underbrace{|\mathbf{A}|}_{1} \epsilon_{ijk} \quad (\text{Ver Ejemplo 1.21}) \\ &= \epsilon_{ijk} \end{aligned} \quad (1.329)$$

Tensor Isótropo de cuarto orden

Si δ_{kl} es isótropo, resulta sencillo demostrar que los siguientes tensores de cuarto orden son también isótropos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{A}_{ijkl} &= \delta_{ij} \delta_{kl} \\
\mathbb{B}_{ijkl} &= \delta_{ik} \delta_{jl} \\
\mathbb{D}_{ijkl} &= \delta_{il} \delta_{jk}
\end{aligned}
\tag{1.330}$$

Se puede demostrar que cualquier tensor isotrópico de cuarto orden puede ser representado como una combinación lineal de los tres tensores dados anteriormente en (1.330):

$$\begin{aligned}
\mathbf{C} &= a_0 \mathbf{A} + a_1 \mathbf{B} + a_2 \mathbf{D} \\
\mathbf{C} &= a_0 \mathbf{1} \otimes \mathbf{1} + a_1 \overline{\mathbf{1}} \otimes \mathbf{1} + a_2 \mathbf{1} \otimes \underline{\mathbf{1}} \\
\mathbb{C}_{ijkl} &= a_0 \delta_{ij} \delta_{kl} + a_1 \delta_{ik} \delta_{jl} + a_2 \delta_{il} \delta_{jk}
\end{aligned}
\tag{1.331}$$

Ejemplo 1.35: Demostrar que el tensor de cuarto orden \mathbf{C} es isotrópico, donde las componentes de este tensor vienen dadas por:

$$\mathbb{C}_{ijkl} = \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk})$$

donde λ, μ son constantes.

Solución:

La ley de transformación de las componentes de un tensor de cuarto orden viene dada por:

$$\mathbb{C}'_{ijkl} = a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \mathbb{C}_{mnpq}$$

Considerando que $\mathbb{C}_{mnpq} = \lambda \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu (\delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np})$ y reemplazando en la expresión anterior, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
\mathbb{C}'_{ijkl} &= a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} [\lambda \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu (\delta_{mp} \delta_{nq} + \delta_{mq} \delta_{np})] \\
&= \lambda a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \delta_{mn} \delta_{pq} + \mu (a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \delta_{mp} \delta_{nq} + a_{im} a_{jn} a_{kp} a_{lq} \delta_{mq} \delta_{np}) \\
&= \lambda a_{in} a_{jn} a_{kq} a_{lq} + \mu (a_{ip} a_{jq} a_{kp} a_{lq} + a_{iq} a_{jn} a_{kn} a_{lq}) \\
&= \lambda \delta_{ij} \delta_{kl} + \mu (\delta_{ik} \delta_{jl} + \delta_{il} \delta_{jk}) \\
&= \mathbb{C}_{ijkl}
\end{aligned}$$

Con lo que demostramos que el tensor \mathbf{C} es isotrópico.

1.5.10 Tensores Coaxiales

Decimos que dos tensores de segundo orden simétricos \mathbf{T} y \mathbf{S} son coaxiales, si presentan los mismos autovectores, luego:

$$\mathbf{T} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad ; \quad \mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 \gamma_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \tag{1.332}$$

Es de fácil demostración que, para que dos tensores sean coaxiales, es suficiente que el producto escalar entre ellos sea conmutativo, es decir:

$$\text{si } \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{S}, \mathbf{T} \text{ son coaxiales} \tag{1.333}$$

También podemos concluir que un tensor simétrico \mathbf{S} , y su inversa \mathbf{S}^{-1} son tensores coaxiales puesto que:

$$\mathbf{S} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad ; \quad \mathbf{S}^{-1} = \sum_{a=1}^3 \frac{1}{\lambda_a} \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad (1.334)$$

siendo $\lambda_a, \frac{1}{\lambda_a}$, los autovalores de \mathbf{S} y \mathbf{S}^{-1} , respectivamente.

Si \mathbf{S} y \mathbf{T} son tensores simétricos y coaxiales podemos demostrar que el tensor resultante de la operación $(\mathbf{S} \cdot \mathbf{T})$ resulta ser otro tensor simétrico. Para su demostración partimos de la definición de tensores coaxiales:

$$\mathbf{T} \cdot \mathbf{S} = \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} - \mathbf{S} \cdot \mathbf{T} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad \mathbf{T} \cdot \mathbf{S} - (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^T = \mathbf{0} \Rightarrow 2(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^{anti} = \mathbf{0} \quad (1.335)$$

Luego si la parte antisimétrica de un tensor es cero resulta que este tensor es simétrico:

$$(\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^{anti} = \mathbf{0} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S}) \equiv (\mathbf{T} \cdot \mathbf{S})^{sym} \quad (1.336)$$

1.5.11 Series de Tensores

Dada una función $f(x)$ podemos aproximar esta función a través de serie de Taylor por

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \frac{\partial^n f(a)}{\partial x^n} (x-a)^n$, donde $n!$ representa el factorial de n y $f(a)$ el valor de la

función en el punto de aplicación $x = a$. Podemos extrapolar esta definición para tensores. Por ejemplo, supongamos que un tensor de segundo orden \mathbf{S} sea una función de otro tensor de segundo orden \mathbf{E} luego, podemos aproximar $\mathbf{S}(\mathbf{E})$ como:

$$\begin{aligned} \mathbf{S}(\mathbf{E}) &\approx \frac{1}{0!} \mathbf{S}(\mathbf{E}_0) + \frac{1}{1!} \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E}_0)}{\partial \mathbf{E}} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2!} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)^T : \frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{E}_0)}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) + \dots \\ &\approx \mathbf{S}_0 + \frac{\partial \mathbf{S}(\mathbf{E}_0)}{\partial \mathbf{E}} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) + \frac{1}{2} (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0)^T : \frac{\partial^2 \mathbf{S}(\mathbf{E}_0)}{\partial \mathbf{E} \otimes \partial \mathbf{E}} : (\mathbf{E} - \mathbf{E}_0) + \dots \end{aligned} \quad (1.337)$$

Otras expresiones algebraicas de tensores pueden ser representadas mediante series como:

$$\begin{aligned} \exp^{\mathbf{S}} &= \mathbf{1} + \mathbf{S} + \frac{1}{2!} \mathbf{S}^2 + \frac{1}{3!} \mathbf{S}^3 + \dots \\ \ln(\mathbf{1} + \mathbf{S}) &= \mathbf{S} - \frac{1}{2} \mathbf{S}^2 + \frac{1}{3} \mathbf{S}^3 - \dots \\ \sin(\mathbf{S}) &= \mathbf{S} - \frac{1}{3!} \mathbf{S}^3 + \frac{1}{5!} \mathbf{S}^5 - \dots \end{aligned} \quad (1.338)$$

Consideremos un tensor \mathbf{S} de segundo orden simétrico e isótropo, por lo que puede ser representado por su forma espectral como:

$$\begin{aligned}\exp^{\mathbf{S}} &= \sum_{a=1}^3 \left(1 + \lambda_a + \frac{\lambda_a^2}{2!} + \frac{\lambda_a^3}{3!} + \dots \right) \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \exp^{\lambda_a} \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \\ \ln(\mathbf{1} + \mathbf{S}) &= \sum_{a=1}^3 \left(\lambda_a - \frac{1}{2} \lambda_a^2 + \frac{1}{3} \lambda_a^3 + \dots \right) \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \ln(1 + \lambda_a) \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)}\end{aligned}\quad (1.339)$$

donde λ_a y $\hat{\mathbf{n}}^{(a)}$ son los autovalores y autovectores, respectivamente, del tensor \mathbf{S} .

Podemos extender estos conceptos para obtener la definición de una función de tensión del tipo $\mathbf{S}^{\frac{1}{m}}$, donde m es un número entero. Si definimos $\mathbf{S}^{\frac{1}{m}}$ como:

$$\mathbf{S} = \left(\mathbf{S}^{\frac{1}{m}} \right) \left(\mathbf{S}^{\frac{1}{m}} \right) \dots \left(\mathbf{S}^{\frac{1}{m}} \right) = \left(\mathbf{S}^{\frac{1}{m}} \right)^m \quad (1.340)$$

La forma espectral correspondiente viene dada por:

$$\mathbf{S}^{\frac{1}{m}} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a^{\frac{1}{m}} \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \quad (1.341)$$

con lo que nos permite obtener $\mathbf{S}^{\frac{1}{m}}$ una vez conocidos $\lambda_a^{\frac{1}{m}}$ y $\hat{\mathbf{n}}^{(a)}$.

1.5.12 Descomposición Polar

Consideremos un tensor de segundo orden \mathbf{F} no singular ($\det(\mathbf{F}) \neq 0 \Rightarrow \exists \mathbf{F}^{-1}$). Además, como visto anteriormente, $\mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}} = \lambda_{(\hat{\mathbf{n}})} \hat{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$ ya que $\det(\mathbf{F}) \neq 0$. Con eso, podemos decir que:

$$\begin{aligned}\mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{F} &= \mathbf{1} = \sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} = \mathbf{F} \cdot \sum_{a=1}^3 \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \\ \Rightarrow \mathbf{F} &= \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)}\end{aligned}\quad (1.342)$$

Además considerando que la transformación entre $\hat{\mathbf{N}}^{(a)}$ y $\hat{\mathbf{n}}^{(a)}$ viene dada por la siguiente transformación ortogonal $\hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(a)}$, podemos decir que:

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} \quad (1.343)$$

donde hemos definido el tensor $\mathbf{U} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)}$. Ya que $\hat{\mathbf{N}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)}$ resulta un tensor simétrico, el tensor \mathbf{U} también lo es, $\mathbf{U} = \mathbf{U}^T$. Análogamente, pero ahora teniendo en cuenta que $\hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \mathbf{R} \cdot \hat{\mathbf{N}}^{(a)} \Rightarrow \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \mathbf{R}^T \cdot \hat{\mathbf{n}}^{(a)} = \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \mathbf{R}$, podemos decir que:

$$\mathbf{F} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{N}}^{(a)} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \mathbf{R} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \cdot \mathbf{R} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R} \quad (1.344)$$

donde hemos definido el tensor $\mathbf{V} = \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)}$. Verificamos que \mathbf{V} es simétrico, y comparando las representaciones espectrales de los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} , verificamos que tienen los mismos autovalores y distintos autovectores. Podemos demostrar que los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} son definidos positivos.

Recordemos del ejercicio 1.25 que los tensores resultantes de las operaciones $\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}$ y $\mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T$ resultan tensores simétricos y definidos positivos. Haciendo el producto escalar por la izquierda por \mathbf{F}^T en la relación $\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U}$ obtenemos que:

$$\underbrace{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}}_{\mathbf{C}} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = (\mathbf{R}^T \cdot \mathbf{F})^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2 \Rightarrow \mathbf{U} = \sqrt{\mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F}} = \sqrt{\mathbf{C}} \quad (1.345)$$

Análogamente podemos obtener que:

$$\mathbf{V} = \sqrt{\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T} = \sqrt{\mathbf{b}} \quad (1.346)$$

Como los tensores \mathbf{C} y \mathbf{b} son tensores simétricos y definidos positivos, eso implica que los autovalores de \mathbf{C} y \mathbf{b} son todos reales y positivos, como consecuencia directa, los tensores \mathbf{U} y \mathbf{V} son tensores simétricos y definidos positivos.

La demostración que acabamos de hacer se llama de Descomposición Polar, que dice que un tensor de segundo orden arbitrario \mathbf{F} no singular ($\det(\mathbf{F}) \neq 0$) puede descomponerse en un producto de tensores, si uno es ortogonal propio (\mathbf{R}) y el otro es un tensor simétrico definido positivo (\mathbf{U}, \mathbf{V}), es decir:

$$\boxed{\mathbf{F} = \mathbf{R} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{V} \cdot \mathbf{R}} \quad \text{Descomposición polar} \quad (1.347)$$

1.5.13 Tensor Esférico y Desviador

Cualquier tensor puede ser descompuesto en una parte esférica y en otra parte desviadora. Luego, para un tensor \mathbf{T} esta descomposición viene dada por:

$$\begin{aligned} \mathbf{T} &= \mathbf{T}^{esf} + \mathbf{T}^{dev} \\ &= \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3} \mathbf{1} + \mathbf{T}^{dev} = \frac{I_{\mathbf{T}}}{3} \mathbf{1} + \mathbf{T}^{dev} \\ &= \mathbb{T}_m \mathbf{1} + \mathbf{T}^{dev} \end{aligned} \quad (1.348)$$

El tensor desviador de \mathbf{T} vendrá definido como:

$$\mathbf{T}^{dev} = \mathbf{T} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3} \mathbf{1} = \mathbf{T} - \mathbb{T}_m \mathbf{1} \quad (1.349)$$

Para las operaciones siguientes consideraremos que \mathbf{T} es un tensor simétrico ($\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$) luego, en estas condiciones las componentes del tensor \mathbf{T}^{dev} vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_{ij}^{dev} &= \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11}^{dev} & \mathbf{T}_{12}^{dev} & \mathbf{T}_{13}^{dev} \\ \mathbf{T}_{12}^{dev} & \mathbf{T}_{22}^{dev} & \mathbf{T}_{23}^{dev} \\ \mathbf{T}_{13}^{dev} & \mathbf{T}_{23}^{dev} & \mathbf{T}_{33}^{dev} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_m & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_m & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_m \end{bmatrix} \\
 &= \begin{bmatrix} \frac{1}{3}(2\mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_{33}) & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{12} & \frac{1}{3}(2\mathbf{T}_{22} - \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{33}) & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{23} & \frac{1}{3}(2\mathbf{T}_{33} - \mathbf{T}_{11} - \mathbf{T}_{22}) \end{bmatrix}
 \end{aligned} \tag{1.350}$$

Podemos también hacer la representación de las componentes del tensor dado por (1.348) en la base cartesiana tal y como se indica en la Figura 1.30.

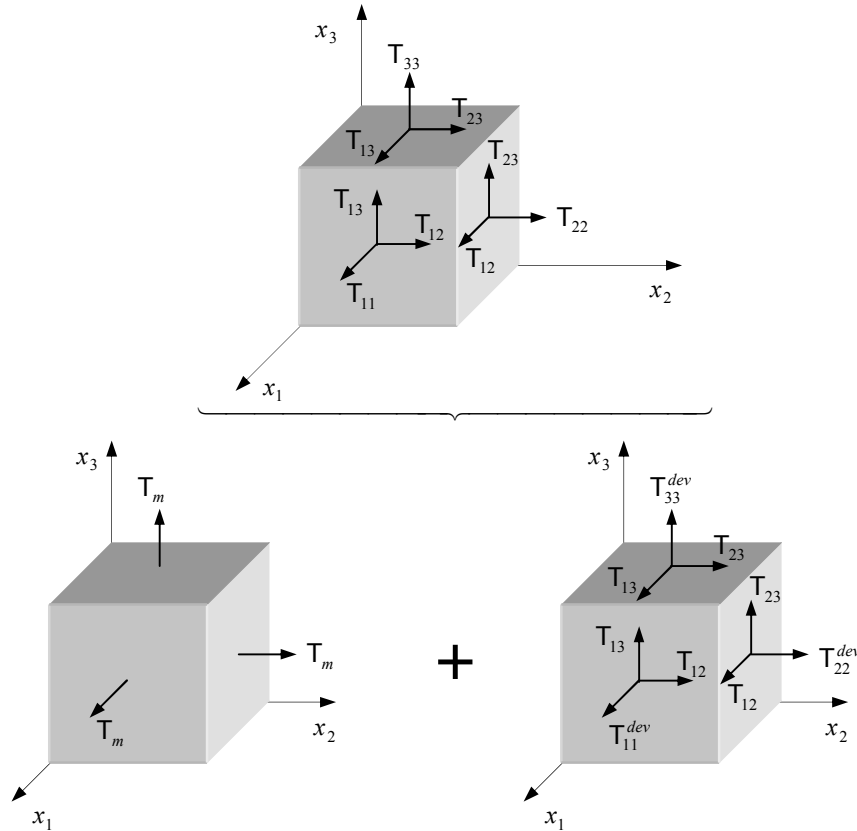


Figura 1.30: Parte esférica y desviadora de un tensor de segundo orden.

1.5.13.1 Primer Invariante del Tensor Desviador

Los invariantes del tensor desviador (\mathbf{T}^{dev}) pueden ser obtenidos en función de los invariantes principales de \mathbf{T} :

$$I_{\mathbf{T}^{dev}} = \text{Tr}(\mathbf{T}^{dev}) = \text{Tr}\left[\mathbf{T} - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3}\mathbf{1}\right] = \text{Tr}(\mathbf{T}) - \frac{\text{Tr}(\mathbf{T})}{3}\underbrace{\text{Tr}(\mathbf{1})}_{\delta_{ii}=3} = 0 \tag{1.351}$$

Con lo que concluimos que la traza de cualquier tensor desviador es cero.

1.5.13.2 Segundo Invariante del Tensor Desviador

Para obtener el segundo y tercer invariante del tensor desviador utilizaremos el espacio de las direcciones principales por simplicidad. En este espacio se cumple que:

Componentes del tensor:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & T_3 \end{bmatrix} \quad (1.352)$$

Invariantes principales: $I_{\mathbf{T}} = T_1 + T_2 + T_3$, $II_{\mathbf{T}} = T_1T_2 + T_2T_3 + T_3T_1$, $III_{\mathbf{T}} = T_1T_2T_3$.

Las componentes del tensor desviador definido en (1.349) ($\mathbf{T}^{dev} = \mathbf{T} - T_m \mathbf{1}$) en el espacio de las direcciones principales son:

$$\mathbf{T}_{ij}^{dev} = \begin{bmatrix} T_1 - T_m & 0 & 0 \\ 0 & T_2 - T_m & 0 \\ 0 & 0 & T_3 - T_m \end{bmatrix} \quad (1.353)$$

El segundo invariante del tensor desviador de \mathbf{T} puede ser obtenido como:

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{T}^{dev}} &= (T_1 - T_m)(T_2 - T_m) + (T_1 - T_m)(T_3 - T_m) + (T_2 - T_m)(T_3 - T_m) \\ &= (T_1T_2 + T_1T_3 + T_2T_3) - 2T_m(T_1 + T_2 + T_3) + 3T_m^2 \\ &= II_{\mathbf{T}} - \frac{2I_{\mathbf{T}}}{3}(I_{\mathbf{T}}) + \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{3} \\ &= \frac{1}{3}(3II_{\mathbf{T}} - I_{\mathbf{T}}^2) \end{aligned} \quad (1.354)$$

También podríamos haber obtenido el resultado anterior partiendo directamente de la definición del segundo invariante de un tensor dado en (1.277):

$$\begin{aligned} II_{\mathbf{T}^{dev}} &= \frac{1}{2} \{ (I_{\mathbf{T}^{dev}})^2 - \text{Tr}[(\mathbf{T}^{dev})^2] \} = -\frac{1}{2} \{ \text{Tr}[(\mathbf{T}^{dev})^2] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ -\text{Tr}[(\mathbf{T} - T_m \mathbf{1})^2] \} \\ &= \frac{1}{2} \{ -\text{Tr}[\mathbf{T}^2 - 2T_m \mathbf{T} \cdot \mathbf{1} + T_m^2 \mathbf{1}] \} \\ &= \frac{1}{2} [-\text{Tr}(\mathbf{T}^2) + 2T_m \text{Tr}(\mathbf{T}) - T_m^2 \text{Tr}(\mathbf{1})] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\text{Tr}(\mathbf{T}^2) + 2\frac{I_{\mathbf{T}}}{3} I_{\mathbf{T}} - \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{9} \cdot 3 \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[-\text{Tr}(\mathbf{T}^2) + \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{3} \right] \end{aligned} \quad (1.355)$$

Podemos sumar y restar el término $\frac{1}{2} I_{\mathbf{T}}^2$ sin alterar la expresión:

$$\begin{aligned}
II_{\mathbf{T}^{dev}} &= \frac{1}{2} \left[I_{\mathbf{T}}^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2) + \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{3} - I_{\mathbf{T}}^2 \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[I_{\mathbf{T}}^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \right] - \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{3} \\
&= II_{\mathbf{T}} - \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{3} \\
&= \frac{1}{3} (3 II_{\mathbf{T}} - I_{\mathbf{T}}^2)
\end{aligned} \tag{1.356}$$

Otra expresión que podemos encontrar en la literatura, para el segundo invariante de un tensor desviador, es en función de las componentes del tensor desviador. Utilizando la expresión (1.355):

$$\begin{aligned}
II_{\mathbf{T}^{dev}} &= -\frac{1}{2} \text{Tr}[(\mathbf{T}^{dev})^2] = -\frac{1}{2} \text{Tr}[(\mathbf{T}^{dev} \cdot \mathbf{T}^{dev})] = -\frac{1}{2} \mathbf{T}^{dev} \cdot \mathbf{T}^{dev} \\
&= -\frac{1}{2} T_{ij}^{dev} T_{ji}^{dev}
\end{aligned} \tag{1.357}$$

Expandiendo la expresión anterior obtenemos:

$$II_{\mathbf{T}^{dev}} = -\frac{1}{2} \left[(T_{11}^{dev})^2 + (T_{22}^{dev})^2 + (T_{33}^{dev})^2 + 2(T_{12}^{dev})^2 + 2(T_{13}^{dev})^2 + 2(T_{23}^{dev})^2 \right] \tag{1.358}$$

En el espacio de las direcciones principales:

$$II_{\mathbf{T}^{dev}} = -\frac{1}{2} T_{ij}^{dev} T_{ji}^{dev} = -\frac{1}{2} \left[(T_1^{dev})^2 + (T_2^{dev})^2 + (T_3^{dev})^2 \right] \tag{1.359}$$

Otra forma de expresar el segundo invariante viene demostrada a continuación:

$$\begin{aligned}
II_{\mathbf{T}^{dev}} &= \begin{vmatrix} T_{22}^{dev} & T_{23}^{dev} \\ T_{23}^{dev} & T_{33}^{dev} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11}^{dev} & T_{13}^{dev} \\ T_{13}^{dev} & T_{33}^{dev} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} T_{11}^{dev} & T_{12}^{dev} \\ T_{12}^{dev} & T_{22}^{dev} \end{vmatrix} \\
&= -\frac{1}{2} \left[-2T_{22}^{dev} T_{33}^{dev} - 2T_{11}^{dev} T_{33}^{dev} - 2T_{11}^{dev} T_{22}^{dev} \right] - (T_{12}^{dev})^2 - (T_{23}^{dev})^2 - (T_{13}^{dev})^2
\end{aligned} \tag{1.360}$$

O aún:

$$\begin{aligned}
II_{\mathbf{T}^{dev}} &= -\frac{1}{2} \left[(T_{22}^{dev})^2 - 2T_{22}^{dev} T_{33}^{dev} + (T_{33}^{dev})^2 + (T_{11}^{dev})^2 - 2T_{11}^{dev} T_{33}^{dev} + (T_{33}^{dev})^2 + \right. \\
&\quad \left. (T_{11}^{dev})^2 - 2T_{11}^{dev} T_{22}^{dev} + (T_{22}^{dev})^2 \right] + (T_{11}^{dev})^2 + (T_{22}^{dev})^2 + (T_{33}^{dev})^2 \\
&\quad - (T_{12}^{dev})^2 - (T_{23}^{dev})^2 - (T_{13}^{dev})^2
\end{aligned} \tag{1.361}$$

Observa que de la ecuación (1.315) obtenemos que:

$$(T_{11}^{dev})^2 + (T_{22}^{dev})^2 + (T_{33}^{dev})^2 = -2 II_{\mathbf{T}^{dev}} - 2(T_{12}^{dev})^2 - 2(T_{13}^{dev})^2 - 2(T_{23}^{dev})^2 \tag{1.362}$$

Reemplazando (1.362) en la expresión (1.361) obtenemos:

$$II_{\mathbf{T}^{dev}} = -\frac{1}{6} \left[(T_{22}^{dev} - T_{33}^{dev})^2 + (T_{11}^{dev} - T_{33}^{dev})^2 + (T_{11}^{dev} - T_{22}^{dev})^2 \right] - (T_{12}^{dev})^2 - (T_{23}^{dev})^2 - (T_{13}^{dev})^2 \tag{1.363}$$

Y si consideramos las direcciones principales:

$$II_{\mathbf{T}^{dev}} = -\frac{1}{6} \left[(\mathbb{T}_2^{dev} - \mathbb{T}_3^{dev})^2 + (\mathbb{T}_1^{dev} - \mathbb{T}_3^{dev})^2 + (\mathbb{T}_1^{dev} - \mathbb{T}_2^{dev})^2 \right] \quad (1.364)$$

1.5.13.3 Tercer Invariante del Tensor Desviador

El tercer invariante del tensor desviador de \mathbf{T} queda:

$$\begin{aligned} III_{\mathbf{T}^{dev}} &= (\mathbb{T}_1 - \mathbb{T}_m)(\mathbb{T}_2 - \mathbb{T}_m)(\mathbb{T}_3 - \mathbb{T}_m) \\ &= \mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2 \mathbb{T}_3 - \mathbb{T}_m (\mathbb{T}_1 \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_1 \mathbb{T}_3 + \mathbb{T}_2 \mathbb{T}_3) + \mathbb{T}_m^2 (\mathbb{T}_1 + \mathbb{T}_2 + \mathbb{T}_3) - \mathbb{T}_m^3 \\ &= III_{\mathbf{T}} - \frac{I_{\mathbf{T}}}{3} II_{\mathbf{T}} + \frac{I_{\mathbf{T}}^2}{9} I_{\mathbf{T}} - \frac{I_{\mathbf{T}}^3}{27} \\ &= III_{\mathbf{T}} - \frac{I_{\mathbf{T}} II_{\mathbf{T}}}{3} + \frac{2I_{\mathbf{T}}^3}{27} \\ &= \frac{1}{27} (2I_{\mathbf{T}}^3 - 9I_{\mathbf{T}} II_{\mathbf{T}} + 27 III_{\mathbf{T}}) \end{aligned} \quad (1.365)$$

Otra forma de expresar el tercer invariante es:

$$\begin{aligned} III_{\mathbf{T}^{dev}} &= \mathbb{T}_1^{dev} \mathbb{T}_2^{dev} \mathbb{T}_3^{dev} \\ &= \frac{1}{3} \mathbb{T}_{ij}^{dev} \mathbb{T}_{jk}^{dev} \mathbb{T}_{ki}^{dev} \end{aligned} \quad (1.366)$$

1.6 Función de Tensores

Una función de tensores puede resultar ser un escalar, un vector, o tensores de orden superior. Como ejemplo de una función tensores de valor-escalar tenemos:

$$\begin{aligned} \Psi &= \Psi(\mathbf{T}) = \det(\mathbf{T}) \\ \Psi &= \Psi(\mathbf{T}, \mathbf{S}) = \mathbf{T} : \mathbf{S} \end{aligned} \quad (1.367)$$

donde \mathbf{T} y \mathbf{S} son tensores de segundo orden. Como ejemplo de función de tensores cuyo argumento es un tensor de segundo orden (valor-tensor de segundo orden) tenemos:

$$\Pi = \Pi(\mathbf{T}) = \alpha \mathbf{1} + \beta \mathbf{T} \quad (1.368)$$

con α, β escalares.

1.6.1 Función Isótropa de Tensores

Si $\Pi = \Pi(\mathbf{T})$ es una función tensor isótropa del tensor \mathbf{T} , luego, esta función es un invariante bajo una transformación ortogonal:

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \mathbf{Q} \cdot \Pi(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{Q}^T = \underbrace{\Pi(\mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T)}_{\Pi(\mathbf{T}^*)} \quad (1.369)$$

Si \mathbf{T} es un tensor simétrico podemos expresarlo según su representación espectral como:

$$\begin{aligned}\mathbf{T} &= \sum_{a=1}^3 \lambda_a \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \\ &= \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)}\end{aligned}\quad (1.370)$$

donde λ_a son los autovalores de \mathbf{T} y $\hat{\mathbf{n}}^{(a)}$ son las direcciones principales correspondientes.

Podemos demostrar que $\Pi(\mathbf{T})$ presenta las mismas direcciones principales de \mathbf{T} , es decir, $\Pi(\mathbf{T})$ y \mathbf{T} son tensores coaxiales.

Para esta demostración consideremos las componentes de \mathbf{T} según las direcciones principales:

$$(\mathbf{T})_{ij} = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{bmatrix}\quad (1.371)$$

Los términos $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ son los valores principales de \mathbf{T} . Luego, la función de tensor vendrá dada en función de los valores principales de \mathbf{T} : $\Pi = \Pi(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$. Si \mathbf{T} es isótropo se cumple que:

$$\mathbf{T}^* = \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.372)$$

Análogamente para la función Π :

$$\Pi^*(\mathbf{T}) = \mathbf{Q} \cdot \Pi(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{Q}^T \quad (1.373)$$

Adoptemos como las componentes del tensor ortogonal las siguientes:

$$(\mathbf{Q})_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}\quad (1.374)$$

Efectuando la operación (1.373) obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pi^* &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & -\Pi_{12} & -\Pi_{13} \\ -\Pi_{12} & \Pi_{22} & -\Pi_{23} \\ -\Pi_{13} & -\Pi_{23} & \Pi_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Pi_{11} & \Pi_{12} & \Pi_{13} \\ \Pi_{12} & \Pi_{22} & \Pi_{23} \\ \Pi_{13} & \Pi_{23} & \Pi_{33} \end{bmatrix} = \Pi \\ \Rightarrow \Pi^* &= \begin{bmatrix} \Pi_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \Pi_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \Pi_{33} \end{bmatrix}\end{aligned}\quad (1.375)$$

Para que se cumpla que $\Pi^* = \Pi$ (isotropía) concluimos que: $\Pi_{12} = \Pi_{13} = \Pi_{23} = 0$. Luego, $\Pi(\mathbf{T})$ y \mathbf{T} presentan las mismas direcciones principales.

Consideremos una función Π , que es función del tensor \mathbf{T} . Esta función de tensión será isótropa si y sólo si podemos representarla a través de la siguiente transformación, Truesdell & Noll (1965):

$$\Pi = \Pi(\mathbf{T}) = \Phi_0 \mathbf{1} + \Phi_1 \mathbf{T} + \Phi_2 \mathbf{T}^2 \quad (1.376)$$

donde Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 son funciones de los invariantes del tensor o autovalores de \mathbf{T} .

La demostración sigue a continuación. Consideremos la representación espectral de la función de tensión Π :

$$\begin{aligned}\Pi &= \sum_{a=1}^3 \omega_a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \\ &= \omega_1 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \omega_2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \omega_3 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)}\end{aligned}\quad (1.377)$$

Observemos que los autovalores de Π , $\omega_a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$, están en función de los autovalores de \mathbf{T} y que ellos presentan las mismas direcciones principales $\hat{\mathbf{n}}^{(i)}$. Representaremos $\omega_a(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3)$ simplemente por ω_a por simplicidad.

Podemos montar el siguiente sistema:

$$\begin{cases} \mathbf{1} = \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \\ \mathbf{T} = \lambda_1 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \lambda_2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \lambda_3 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \\ \mathbf{T}^2 = \lambda_1^2 \hat{\mathbf{n}}^{(1)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(1)} + \lambda_2^2 \hat{\mathbf{n}}^{(2)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(2)} + \lambda_3^2 \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(3)} \end{cases}\quad (1.378)$$

Resolviendo el sistema anterior obtenemos $\hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \equiv \mathbf{M}^{(a)}$ en función del tensor \mathbf{T} y dados por:

$$\begin{aligned}\mathbf{M}^{(1)} &= \frac{\lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} \mathbf{1} - \frac{(\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} \mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} \\ \mathbf{M}^{(2)} &= \frac{\lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \mathbf{1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} \\ \mathbf{M}^{(3)} &= \frac{\lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathbf{1} - \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \mathbf{T} + \frac{\mathbf{T}^2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\end{aligned}\quad (1.379)$$

Obviamente si reemplazamos los valores de $\hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \equiv \mathbf{M}^{(a)}$ en la expresión (1.370) obtenemos que $\mathbf{T} = \mathbf{T}$. Reemplazando ahora los valores de $\hat{\mathbf{n}}^{(a)} \otimes \hat{\mathbf{n}}^{(a)} \equiv \mathbf{M}^{(a)}$ en la expresión (1.377) obtenemos que:

$$\Pi = \Pi(\mathbf{T}) = \Phi_0 \mathbf{1} + \Phi_1 \mathbf{T} + \Phi_2 \mathbf{T}^2 \quad (1.380)$$

donde los coeficientes Φ_0 , Φ_1 , Φ_2 son funciones de los autovalores de \mathbf{T} y dados por:

$$\begin{aligned}\Phi_0 &= \frac{\omega_1 \lambda_2 \lambda_3}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\omega_2 \lambda_1 \lambda_3}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{\omega_3 \lambda_1 \lambda_2}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ \Phi_1 &= -\frac{\omega_1 (\lambda_2 + \lambda_3)}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} - \frac{\omega_2 (\lambda_1 + \lambda_3)}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} - \frac{\omega_3 (\lambda_1 + \lambda_2)}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)} \\ \Phi_2 &= \frac{\omega_1}{(\lambda_1 - \lambda_3)(\lambda_1 - \lambda_2)} + \frac{\omega_2}{(\lambda_2 - \lambda_1)(\lambda_2 - \lambda_3)} + \frac{\omega_3}{(\lambda_3 - \lambda_1)(\lambda_3 - \lambda_2)}\end{aligned}\quad (1.381)$$

Podríamos haber demostrado que una función tensor isotropa cumple (1.380) partiendo de la siguiente expresión:

$$\begin{aligned}
\Pi^*(\mathbf{T}) &= \mathbf{Q} \cdot \Pi(\mathbf{T}) \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \mathbf{Q} \cdot (\Phi_0 \mathbf{1} + \Phi_1 \mathbf{T} + \Phi_2 \mathbf{T}^2) \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \Phi_0 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{Q}^T + \Phi_1 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T} \cdot \mathbf{Q}^T + \Phi_2 \mathbf{Q} \cdot \mathbf{T}^2 \cdot \mathbf{Q}^T \\
&= \Phi_0 \mathbf{1} + \Phi_1 \mathbf{T}^* + \Phi_2 \mathbf{T}^{*2} \\
&= \Pi(\mathbf{T}^*)
\end{aligned} \tag{1.382}$$

1.6.2 Derivada Parcial de Función de Tensores

Consideremos una función escalar que es función de un tensor \mathbf{A} :

$$\Pi = \Pi(\mathbf{A}) \tag{1.383}$$

La derivada parcial de Π con respecto a \mathbf{A} viene definida como:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial \mathbf{A}} = \Pi_{,\mathbf{A}} = \frac{\partial \Pi}{\partial A_{ij}} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \tag{1.384}$$

donde la coma se utiliza para indicar derivada parcial.

La segunda derivada resultará un tensor de cuarto orden:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 \Pi}{\partial \mathbf{A} \otimes \partial \mathbf{A}} = \Pi_{,\mathbf{A}\mathbf{A}} &= \frac{\partial^2 \Pi}{\partial A_{ij} \partial A_{kl}} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\
&= \mathbb{D}_{ijkl} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l)
\end{aligned} \tag{1.385}$$

La primera derivada de un tensor con respecto a él mismo viene definido como:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial \mathbf{A}} = \mathbf{A}_{,\mathbf{A}} &= \frac{\partial A_{ij}}{\partial A_{kl}} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\
&= \delta_{ik} \delta_{jl} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l) \\
&= \mathbb{I} \text{ (tensor identidad de cuarto orden)}
\end{aligned} \tag{1.386}$$

Podemos entonces obtener la derivada de la traza de un tensor respecto a él mismo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial [\text{Tr}(\mathbf{A})]}{\partial \mathbf{A}} = [\text{Tr}(\mathbf{A})]_{,\mathbf{A}} &= \frac{\partial A_{kk}}{\partial A_{ij}} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \delta_{ki} \delta_{kj} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \delta_{ij} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \equiv \mathbf{1}
\end{aligned} \tag{1.387}$$

La derivada parcial de la traza al cuadrado de un tensor respecto al él mismo:

$$\frac{\partial [\text{Tr}(\mathbf{A})]^2}{\partial \mathbf{A}} = 2 \text{Tr}(\mathbf{A}) \frac{\partial [\text{Tr}(\mathbf{A})]}{\partial \mathbf{A}} = 2 \text{Tr}(\mathbf{A}) \mathbf{1} \tag{1.388}$$

La derivada parcial de la traza del cuadrado un tensor respecto al él mismo:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{A}^2)]}{\partial \mathbf{A}} &= \frac{\partial(\mathbf{A}_{sr} \mathbf{A}_{rs})}{\partial \mathbf{A}_{ij}} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= \left[\mathbf{A}_{rs} \frac{\partial(\mathbf{A}_{sr})}{\partial \mathbf{A}_{ij}} + \mathbf{A}_{sr} \frac{\partial(\mathbf{A}_{rs})}{\partial \mathbf{A}_{ij}} \right] (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= [\mathbf{A}_{rs} \delta_{si} \delta_{rj} + \mathbf{A}_{sr} \delta_{ri} \delta_{sj}] (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= [\mathbf{A}_{ji} + \mathbf{A}_{ji}] (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) \\
&= 2\mathbf{A}_{ji} (\hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j) = 2\mathbf{A}^T
\end{aligned} \tag{1.389}$$

Queda al lector la demostración de:

$$\frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{A}^3)]}{\partial \mathbf{A}} = 3(\mathbf{A}^2)^T \tag{1.390}$$

Luego, si consideramos un tensor de segundo orden simétrico \mathbf{C} , podemos decir que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{C})]}{\partial \mathbf{C}} &= \mathbf{1}; & \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{C})]^2}{\partial \mathbf{C}} &= 2\text{Tr}(\mathbf{C})\mathbf{1}; & \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{C}^2)]}{\partial \mathbf{C}} &= 2\mathbf{C}^T = 2\mathbf{C}; \\
\frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{C}^3)]}{\partial \mathbf{C}} &= 3(\mathbf{C}^2)^T = 3\mathbf{C}^2
\end{aligned} \tag{1.391}$$

y además podemos decir que la derivada de la norma del tensor simétrico \mathbf{C} viene dada por:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\|\mathbf{C}\|}{\partial \mathbf{C}} &= \frac{\partial(\sqrt{\mathbf{C}:\mathbf{C}})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial(\sqrt{\text{Tr}(\mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^T)})}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial(\sqrt{\text{Tr}(\mathbf{C}^2)})}{\partial \mathbf{C}} \\
&= \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{C}^2)]^{-\frac{1}{2}} [\text{Tr}(\mathbf{C}^2)]_{\mathbf{C}} \\
&= \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{C}^2)]^{-\frac{1}{2}} 2\mathbf{C}
\end{aligned} \tag{1.392}$$

o aún:

$$\frac{\partial\|\mathbf{C}\|}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\mathbf{C}}{\|\mathbf{C}\|} \tag{1.393}$$

Otra aplicación interesante viene a continuación:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial(\mathbf{n}_i \mathbf{C}_{ij} \mathbf{n}_j)}{\partial \mathbf{n}_k} &= \frac{\partial \mathbf{n}_i}{\partial \mathbf{n}_k} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i \mathbf{C}_{ij} \frac{\partial \mathbf{n}_j}{\partial \mathbf{n}_k} \\
&= \delta_{ik} \mathbf{C}_{ij} \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i \mathbf{C}_{ij} \delta_{jk} \\
&= \mathbf{C}_{kj} \mathbf{n}_j + \mathbf{n}_i \mathbf{C}_{ik} \\
&= \mathbf{C}_{kj} \mathbf{n}_j + \mathbf{C}_{jk} \mathbf{n}_j \\
&= 2\mathbf{C}_{kj} \mathbf{n}_j
\end{aligned} \tag{1.394}$$

donde hemos considerado que \mathbf{C} es simétrico, *i.e.*, $\mathbf{C}_{kj} = \mathbf{C}_{jk}$.

Consideremos aún el tensor de segundo orden simétrico \mathbf{C} . Para obtener la derivada parcial de su inversa con respecto a él mismo partimos de la siguiente condición:

$$\frac{\partial \mathbf{1}}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial (\mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{C})}{\partial \mathbf{C}} = \mathbb{O} \quad (1.395)$$

donde \mathbb{O} es el tensor nulo de cuarto orden. La expresión anterior en notación indicial queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1} \mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} &= \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{qj} + \mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{\partial (\mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} = \mathbb{O}_{ikjl} \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{qj} &= -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{\partial (\mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{qj} \mathbf{C}_{jr}^{-1} &= -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{\partial (\mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{jr}^{-1} \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \delta_{qr} &= -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{\partial (\mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{jr}^{-1} \end{aligned} \quad (1.396)$$

Considerando que $\mathbf{C}_{qj} = \frac{1}{2} (\mathbf{C}_{qj} + \mathbf{C}_{jq})$, la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned} \frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \delta_{qr} &= -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{1}{2} \left[\frac{\partial (\mathbf{C}_{qj} + \mathbf{C}_{jq})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \right] \mathbf{C}_{jr}^{-1} \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{ir}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} &= -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{1}{2} [\delta_{qk} \delta_{jl} + \delta_{jk} \delta_{ql}] \mathbf{C}_{jr}^{-1} \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{ir}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} &= -\frac{1}{2} [\mathbf{C}_{iq}^{-1} \delta_{qk} \delta_{jl} \mathbf{C}_{jr}^{-1} + \mathbf{C}_{iq}^{-1} \delta_{jk} \delta_{ql} \mathbf{C}_{jr}^{-1}] \\ \frac{\partial (\mathbf{C}_{ir}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} &= -\frac{1}{2} [\mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{lr}^{-1} + \mathbf{C}_{il}^{-1} \mathbf{C}_{kr}^{-1}] \end{aligned} \quad (1.397)$$

En notación tensorial queda:

$$\frac{\partial \mathbf{C}^{-1}}{\partial \mathbf{C}} = -\frac{1}{2} [\mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1} + \mathbf{C}^{-1} \otimes \mathbf{C}^{-1}] \quad (1.398)$$

NOTA: Observemos que si no hubiéramos reemplazando la parte simétrica de \mathbf{C}_{qj} en

(1.396), hubiéramos obtenido que $\frac{\partial (\mathbf{C}_{iq}^{-1})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \delta_{qr} = -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \frac{\partial (\mathbf{C}_{qj})}{\partial \mathbf{C}_{kl}} \mathbf{C}_{jr}^{-1} = -\mathbf{C}_{iq}^{-1} \delta_{qk} \delta_{jl} \mathbf{C}_{jr}^{-1} = -\mathbf{C}_{ik}^{-1} \mathbf{C}_{lr}^{-1}$.

Resultando un tensor no simétrico. ■

1.6.3 Derivada Parcial de los Invariantes

Las derivadas parciales de los invariantes principales de un tensor de segundo orden se obtienen a continuación:

Derivada parcial de $I_{\mathbf{T}}$ con respecto a \mathbf{T} , ver ecuación (1.387):

$$\frac{\partial[I_{\mathbf{T}}]}{\partial\mathbf{T}} = \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{T})]}{\partial\mathbf{T}} = [\text{Tr}(\mathbf{T})]_{,\mathbf{T}} = \mathbf{1} \quad (1.399)$$

Derivada parcial de $I_{\mathbf{T}}$ con respecto a \mathbf{T} , ver ecuación (1.387):

$$\begin{aligned} \frac{\partial[I_{\mathbf{T}}]}{\partial\mathbf{T}} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{T}} \left\{ \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \right\} = \frac{1}{2} \left[\frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{T})]^2}{\partial\mathbf{T}} - \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{T}^2)]}{\partial\mathbf{T}} \right] \\ &= \frac{1}{2} [2(\text{Tr}\mathbf{T})\mathbf{1} - 2\mathbf{T}^T] \\ &= \text{Tr}(\mathbf{T})\mathbf{1} - \mathbf{T}^T \end{aligned} \quad (1.400)$$

Aún podemos expresar (1.400) reemplazando \mathbf{T}^T , obtenido por el teorema de Cayley-Hamilton:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^3 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^2 + I_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-2} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow \mathbf{T} &= I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-2} \end{aligned} \quad (1.401)$$

Luego,

$$\begin{aligned} \frac{\partial[I_{\mathbf{T}}]}{\partial\mathbf{T}} &= \text{Tr}(\mathbf{T})\mathbf{1} - \mathbf{T}^T = \text{Tr}(\mathbf{T})\mathbf{1} - (I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-2})^T \\ &= (I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-2})^T \end{aligned} \quad (1.402)$$

Para obtener la derivada del tercer invariante, utilizaremos la definición dada por (1.318):

$$\begin{aligned} \frac{\partial[I_{\mathbf{T}}]}{\partial\mathbf{T}} &= \frac{\partial}{\partial\mathbf{T}} \left\{ \frac{1}{3} \text{Tr}(\mathbf{T}^3) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2)\text{Tr}(\mathbf{T}) + \frac{1}{6} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^3 \right\} \\ &= \frac{1}{3} 3(\mathbf{T}^2)^T - \frac{1}{2} \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{T}^2)]}{\partial\mathbf{T}} \text{Tr}(\mathbf{T}) - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \frac{\partial[\text{Tr}(\mathbf{T})]}{\partial\mathbf{T}} + \frac{3}{6} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^2 \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{T}^2)^T - \text{Tr}(\mathbf{T})\mathbf{T}^T - \frac{1}{2} \text{Tr}(\mathbf{T}^2)\mathbf{1} + \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^2 \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{T}^2)^T - \text{Tr}(\mathbf{T})\mathbf{T}^T + \frac{1}{2} [\text{Tr}(\mathbf{T})]^2 - \text{Tr}(\mathbf{T}^2) \mathbf{1} \\ &= (\mathbf{T}^2)^T - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^T + I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.403)$$

Si multiplicamos por la inversa del tensor \mathbf{T} en la ecuación (1.315) obtenemos:

$$\begin{aligned} \mathbf{T}^3 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^2 + I_{\mathbf{T}}\mathbf{T} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} &= \mathbf{0} \\ \mathbf{T}^2 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{0} \\ \Rightarrow I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1} &= \mathbf{T}^2 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} \end{aligned} \quad (1.404)$$

y la transpuesta:

$$(I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1})^T = (\mathbf{T}^2 - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T} + I_{\mathbf{T}}\mathbf{1})^T = (\mathbf{T}^2)^T - I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^T + I_{\mathbf{T}}\mathbf{1} \quad (1.405)$$

Reemplazando ecuación (1.405) en la expresión (1.403) obtenemos:

$$\frac{\partial[I_{\mathbf{T}}]}{\partial\mathbf{T}} = (I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-1})^T = I_{\mathbf{T}}\mathbf{T}^{-T} \quad (1.406)$$

Ejemplo 1.36: Considere $J = [\det(\mathbf{b})]^{\frac{1}{2}} = (\text{III}_b)^{\frac{1}{2}}$, donde \mathbf{b} es un tensor de segundo orden simétrico, $\mathbf{b} = \mathbf{b}^T$. Obtener la derivada de J y de $\ln(J)$ con respecto a \mathbf{b} .

Solución:

$$\begin{aligned} \Rightarrow \frac{\partial J}{\partial \mathbf{b}} &= \frac{\partial \left[(\text{III}_b)^{\frac{1}{2}} \right]}{\partial \mathbf{b}} \\ &= \frac{1}{2} (\text{III}_b)^{-\frac{1}{2}} \frac{\partial \text{III}_b}{\partial \mathbf{b}} = \frac{1}{2} (\text{III}_b)^{-\frac{1}{2}} \text{III}_b \mathbf{b}^{-T} \\ &= \frac{1}{2} (\text{III}_b)^{\frac{1}{2}} \mathbf{b}^{-1} = \frac{1}{2} J \mathbf{b}^{-1} \\ \Rightarrow \frac{\partial [\ln(J)]}{\partial \mathbf{b}} &= \frac{\partial \left[\ln \left(\text{III}_b^{\frac{1}{2}} \right) \right]}{\partial \mathbf{b}} = \frac{1}{2 \text{III}_b} \frac{\partial \text{III}_b}{\partial \mathbf{b}} = \frac{1}{2} \mathbf{b}^{-1} \end{aligned}$$

Ejemplo 1.37: Considérese un tensor de segundo orden simétrico $\boldsymbol{\sigma}$ y su parte desviadora $\mathbf{s} \equiv \boldsymbol{\sigma}^{dev}$. Obtener el resultado de la operación $\mathbf{s} : \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$. Demostrar también que los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ son tensores coaxiales.

Solución: Teniendo la definición de un tensor desviador $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{esf} + \boldsymbol{\sigma}^{dev} = \boldsymbol{\sigma}^{esf} + \mathbf{s}$. Obtenemos que: $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1}$. Luego:

$$\frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial \left[\boldsymbol{\sigma} - \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1} \right]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} = \frac{\partial [\boldsymbol{\sigma}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} - \frac{1}{3} \frac{\partial [I_{\boldsymbol{\sigma}}]}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \mathbf{1}$$

En notación indicial:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} - \frac{1}{3} \frac{\partial [I_{\boldsymbol{\sigma}}]}{\partial \sigma_{kl}} \delta_{ij} \\ &= \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \end{aligned}$$

Con lo cual

$$\begin{aligned} s_{ij} \frac{\partial s_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} &= s_{ij} \left(\delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \delta_{ij} \right) \\ &= s_{ij} \delta_{ik} \delta_{jl} - \frac{1}{3} s_{ij} \delta_{kl} \delta_{ij} \\ &= s_{kl} - \frac{1}{3} \delta_{kl} \underbrace{s_{ii}}_{=0} \\ &= s_{kl} \\ \mathbf{s} : \frac{\partial \mathbf{s}}{\partial \boldsymbol{\sigma}} &= \mathbf{s} \end{aligned}$$

Para demostrar que dos tensores son coaxiales, hay que cumplir que $\boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{dev}$:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{dev} &= \boldsymbol{\sigma} \cdot (\boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma}^{esf}) = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma}^{esf} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1} \\ &= \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \boldsymbol{\sigma} \cdot \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1} = \boldsymbol{\sigma} \cdot \boldsymbol{\sigma} - \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1} \cdot \boldsymbol{\sigma} \\ &= \left(\boldsymbol{\sigma} - \frac{I_{\boldsymbol{\sigma}}}{3} \mathbf{1} \right) \cdot \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}^{dev} \cdot \boldsymbol{\sigma}\end{aligned}$$

Con lo cual demostramos que los tensores $\boldsymbol{\sigma}$ y $\boldsymbol{\sigma}^{dev}$ son coaxiales, es decir, tienen las mismas direcciones principales.

1.6.4 Casos Particulares de Derivada de Funciones

Consideremos dos tensores de segundo orden simétricos definidos positivos \mathbf{C} y \mathbf{b} , donde estos tensores vienen dados por las relaciones:

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad ; \quad \mathbf{b} = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \quad (1.407)$$

donde \mathbf{F} es un tensor de segundo orden arbitrario con $\det(\mathbf{F}) > 0$.

Sea $\Psi = \Psi(I_C, II_C, III_C)$ una función escalar de los invariantes principales del tensor \mathbf{C} , donde se cumple que $I_C = I_b$, $II_C = II_b$, $III_C = III_b$. Obtendremos la derivada de Ψ con respecto a \mathbf{C} y con respecto a \mathbf{b} y comprobaremos que la siguiente igualdad es válida:

$$\mathbf{F} \cdot \Psi_{,C} \cdot \mathbf{F}^T = \Psi_{,b} \cdot \mathbf{b} \quad (1.408)$$

Utilizando la regla de la cadena podemos obtener que:

$$\Psi_{,C} = \frac{\partial \Psi(I_C, II_C, III_C)}{\partial \mathbf{C}} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_C} \frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_C} \frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} \frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} \quad (1.409)$$

Considerando las derivadas parciales de los invariantes, vistas anteriormente, podemos decir que:

$$\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}$$

$$\frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} = I_C \mathbf{1} - \mathbf{C}^T = I_C \mathbf{1} - \mathbf{C} = II_C \mathbf{C}^{-1} - III_C \mathbf{C}^{-2} \quad (1.410)$$

$$\frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = III_C \mathbf{C}^{-T} = III_C \mathbf{C}^{-1} = \mathbf{C}^2 - I_C \mathbf{C} + II_C \mathbf{1}$$

Luego, considerando $\frac{\partial I_C}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}$, $\frac{\partial II_C}{\partial \mathbf{C}} = I_C \mathbf{1} - \mathbf{C}$ y $\frac{\partial III_C}{\partial \mathbf{C}} = III_C \mathbf{C}^{-1}$, la expresión (1.409) resulta:

$$\Psi_{,C} = \frac{\partial \Psi}{\partial I_C} \mathbf{1} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_C} (I_C \mathbf{1} - \mathbf{C}) + \frac{\partial \Psi}{\partial III_C} III_C \mathbf{C}^{-1} \quad (1.411)$$

$$\Psi_{,c} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} I_c \right) \mathbf{1} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial II_c} \right) \mathbf{C} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \right) \mathbf{C}^{-1} \quad (1.412)$$

Otra forma de expresar la relación (1.412) es considerando $\frac{\partial I_c}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}$, $\frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{C}} = I_c \mathbf{1} - \mathbf{C}$ y $\frac{\partial III_c}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{C}^2 - I_c \mathbf{C} + II_c \mathbf{1}$, obteniendo así:

$$\Psi_{,c} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} I_c + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \right) \mathbf{1} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial II_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} I_c \right) \mathbf{C} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial III_c} \right) \mathbf{C}^2 \quad (1.413)$$

Considerando ahora $\frac{\partial I_c}{\partial \mathbf{C}} = \mathbf{1}$, $\frac{\partial II_c}{\partial \mathbf{C}} = II_c \mathbf{C}^{-1} - III_c \mathbf{C}^{-2}$ y $\frac{\partial III_c}{\partial \mathbf{C}} = III_c \mathbf{C}^{-1}$ obtenemos además:

$$\Psi_{,c} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} \right) \mathbf{1} + \left(\frac{\partial \Psi}{\partial II_c} II_c + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \right) \mathbf{C}^{-1} - \left(\frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \right) \mathbf{C}^{-2} \quad (1.414)$$

Teniendo en consideración las relaciones (1.412) concluimos que:

$$\Psi_{,b} = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_b} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_b} I_b \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \Psi}{\partial II_b} \mathbf{b} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_b} III_b \mathbf{b}^{-1} \quad (1.415)$$

Haciendo una contracción por la izquierda con \mathbf{F} y por la derecha por \mathbf{F}^T en la relación (1.412) obtenemos que:

$$\mathbf{F} \cdot \Psi_{,c} \cdot \mathbf{F}^T = \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} I_c \right) \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{F}^T - \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^T + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T \quad (1.416)$$

Y considerando las siguientes relaciones:

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{b}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \quad (1.417)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{C} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b}^2$$

Y considerando la relación: $\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{F}$ concluimos que:

$$\mathbf{C}^{-1} = \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{F} \quad (1.418)$$

$$\Rightarrow \mathbf{F} \cdot \mathbf{C}^{-1} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^{-1} \cdot \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{F} \cdot \mathbf{F}^T = \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{b}$$

Luego, la expresión (1.416) puede ser reescrita como:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \Psi_{,c} \cdot \mathbf{F}^T &= \left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} I_c \right) \mathbf{b} - \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} \mathbf{b}^2 + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \mathbf{b}^{-1} \cdot \mathbf{b} \\ &= \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_c} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} I_c \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \Psi}{\partial II_c} \mathbf{b} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_c} III_c \mathbf{b}^{-1} \right] \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.419)$$

Teniendo en cuenta las relaciones (1.415) y (1.419) concluimos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{F} \cdot \Psi_{,C} \cdot \mathbf{F}^T &= \left[\left(\frac{\partial \Psi}{\partial I_b} + \frac{\partial \Psi}{\partial II_b} I_b \right) \mathbf{1} - \frac{\partial \Psi}{\partial II_b} \mathbf{b} + \frac{\partial \Psi}{\partial III_b} III_b \mathbf{b}^{-1} \right] \cdot \mathbf{b} \\ &= \Psi_{,b} \cdot \mathbf{b} \end{aligned} \quad (1.420)$$

A través de la expresión (1.415) podemos concluir que la relación $\Psi_{,b} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \Psi_{,b}$ es válida, indicando que los tensores $\Psi_{,b}$ y \mathbf{b} son coaxiales.

Consideremos aún el tensor \mathbf{C} dado por la expresión (1.407) a continuación vamos obtener la derivada de la función $\Psi = \Psi(\mathbf{C})$ con respecto al tensor \mathbf{F} :

$$\begin{aligned} \Psi_{,F} &= \frac{\partial \Psi(\mathbf{C})}{\partial \mathbf{F}} = \frac{\partial \Psi}{\partial \mathbf{C}} : \frac{\partial \mathbf{C}}{\partial \mathbf{F}} \\ (\Psi_{,F})_{kl} &= \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} \frac{\partial C_{ij}}{\partial F_{kl}} \end{aligned} \quad (1.421)$$

La derivada del tensor \mathbf{C} con respecto a \mathbf{F} viene a continuación:

$$\begin{aligned} \frac{\partial C_{ij}}{\partial F_{kl}} &= \frac{\partial (F_{qi} F_{qj})}{\partial F_{kl}} \\ &= \frac{\partial (F_{qi})}{\partial F_{kl}} F_{qj} + F_{qi} \frac{\partial (F_{qj})}{\partial F_{kl}} \\ &= \delta_{qk} \delta_{il} F_{qj} + \delta_{qk} \delta_{jl} F_{qi} \\ &= \delta_{il} F_{kj} + \delta_{jl} F_{ki} \end{aligned} \quad (1.422)$$

Luego, reemplazando (1.422) en (1.421) obtenemos:

$$\begin{aligned} (\Psi_{,F})_{kl} &= \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} (\delta_{il} F_{kj} + \delta_{jl} F_{ki}) \\ &= F_{kj} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} + F_{ki} \frac{\partial \Psi}{\partial C_{il}} \end{aligned} \quad (1.423)$$

Debido a la simetría $C_{ij} = C_{ji}$ y observando que i, j son índices mudos concluimos que:

$$(\Psi_{,F})_{kl} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C_{ij}} F_{kj} = 2 \frac{\partial \Psi}{\partial C_{jl}} F_{kj} \quad (1.424)$$

$$\boxed{\Psi_{,F} = 2\Psi_{,C} \cdot \mathbf{F}^T = 2\mathbf{F} \cdot \Psi_{,C}}$$

Supongamos ahora que el tensor \mathbf{C} sea dado por la relación $\mathbf{C} = \mathbf{U}^T \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{U}^2$, donde \mathbf{U} es un tensor de segundo orden simétrico. Para obtener $\Psi(\mathbf{C})_{,U}$ podemos utilizar la misma expresión obtenida en (1.424), es decir:

$$\Psi_{,U} = 2\Psi_{,C} \cdot \mathbf{U} = 2\mathbf{U} \cdot \Psi_{,C} \quad (1.425)$$

Concluimos también que $\Psi_{,C}$ y \mathbf{U} son tensores coaxiales. Podemos generalizar lo expuesto anteriormente como:

Sea un tensor de segundo orden simétrico \mathbf{A} y una función escalar del tensor \mathbf{A} , $\Psi = \Psi(\mathbf{A})$, se cumple que:

$$\begin{aligned}
\Psi_{,b} &= 2\mathbf{b} \cdot \Psi_{,A} \quad \text{para } \mathbf{A} = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{b} \\
\Psi_{,b} &= 2\Psi_{,A} \cdot \mathbf{b} \quad \text{para } \mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b}^T \\
\Psi_{,b} &= 2\mathbf{b} \cdot \Psi_{,A} = 2\Psi_{,A} \cdot \mathbf{b} \\
&= \mathbf{b} \cdot \Psi_{,A} + \Psi_{,A} \cdot \mathbf{b} \quad \text{para } \mathbf{A} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \quad \text{y } \mathbf{b} = \mathbf{b}^T
\end{aligned}
\tag{1.426}$$

1.7 Notación de Voigt

En el caso de que el tensor sea simétrico, puede resultar ventajoso trabajar solamente con las componentes independientes del tensor. En el caso del tensor de segundo orden simétrico, que tiene 6 componentes independientes, podemos representarlo en forma de matriz columna:

$$\mathbf{T}_{ij} = \begin{bmatrix} T_{11} & T_{12} & T_{13} \\ T_{12} & T_{22} & T_{23} \\ T_{13} & T_{23} & T_{33} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Voigt}} \{\mathbf{T}\} = \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{33} \\ T_{12} \\ T_{23} \\ T_{13} \end{bmatrix}
\tag{1.427}$$

Dicha notación la denotamos de *Notación de Voigt*.

1.7.1 Tensores Identidad en Notación de Voigt

El tensor identidad de segundo orden será representado en la notación de Voigt como:

$$\delta_{ij} \equiv \mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Voigt}} \{\delta\} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
\tag{1.428}$$

El tensor unitario simétrico de cuarto orden en la Notación de Voigt:

$$\mathbf{I}_{ijkl} \xrightarrow{\text{Voigt}} \{\mathbf{I}\} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{Inversa}} \{\mathbf{I}\}^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}
\tag{1.429}$$

Observemos que $\{\mathbf{I}\}^{-1}$ son las componentes del tensor \mathbf{I}_{ijkl}^{-1} en la notación de Voigt.

1.7.2 Producto Escalar en Notación de Voigt

El producto escalar entre un tensor de segundo orden simétrico \mathbf{T} y un vector $\bar{\mathbf{n}}$ viene dado por:

$$\bar{\mathbf{b}} = \mathbf{T} \cdot \bar{\mathbf{n}} \quad (1.430)$$

donde las componentes de esta operación son:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 \\ \mathbf{n}_2 \\ \mathbf{n}_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \mathbf{b}_1 = \mathbf{T}_{11}\mathbf{n}_1 + \mathbf{T}_{12}\mathbf{n}_2 + \mathbf{T}_{13}\mathbf{n}_3 \\ \mathbf{b}_2 = \mathbf{T}_{12}\mathbf{n}_1 + \mathbf{T}_{22}\mathbf{n}_2 + \mathbf{T}_{23}\mathbf{n}_3 \\ \mathbf{b}_3 = \mathbf{T}_{13}\mathbf{n}_1 + \mathbf{T}_{23}\mathbf{n}_2 + \mathbf{T}_{33}\mathbf{n}_3 \end{cases} \quad (1.431)$$

Teniendo en cuenta la representación de un tensor de segundo en notación de Voigt, el producto escalar (1.430) en la Notación de Voigt queda:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{b}_1 \\ \mathbf{b}_2 \\ \mathbf{b}_3 \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \mathbf{n}_1 & 0 & 0 & \mathbf{n}_2 & 0 & \mathbf{n}_3 \\ 0 & \mathbf{n}_2 & 0 & \mathbf{n}_1 & \mathbf{n}_3 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{n}_3 & 0 & \mathbf{n}_2 & \mathbf{n}_1 \end{bmatrix}}_{[\mathcal{N}]^T} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} \end{bmatrix} \quad (1.432)$$

$$\{\mathbf{b}\} = [\mathcal{N}]^T \{\mathcal{T}\}$$

1.7.3 Leyes de Transformación en Notación de Voigt

Para un tensor de segundo orden, la ley de transformación de las componentes vienen definida de la forma:

$$\mathbf{T}'_{ij} = \mathbf{T}_{kl} a_{ki} a_{jl} \quad (1.433)$$

que explícitamente será:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{11} & \mathbf{T}'_{12} & \mathbf{T}'_{13} \\ \mathbf{T}'_{12} & \mathbf{T}'_{22} & \mathbf{T}'_{23} \\ \mathbf{T}'_{13} & \mathbf{T}'_{23} & \mathbf{T}'_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} & \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{13} \\ \mathbf{T}_{12} & \mathbf{T}_{22} & \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} & \mathbf{T}_{23} & \mathbf{T}_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}^T \quad (1.434)$$

Efectuando explícita la operación anterior, podemos reestructurarla en la notación de Voigt resultando así:

$$\{\mathcal{T}'\} = [\mathcal{M}]\{\mathcal{T}\} \quad (1.435)$$

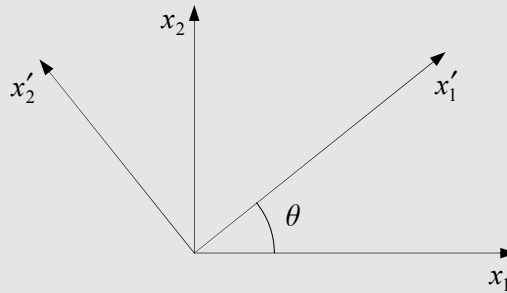
donde:

$$\{\mathcal{T}'\} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}'_{11} \\ \mathbf{T}'_{22} \\ \mathbf{T}'_{33} \\ \mathbf{T}'_{12} \\ \mathbf{T}'_{23} \\ \mathbf{T}'_{13} \end{bmatrix} ; \quad \{\mathcal{T}\} = \begin{bmatrix} \mathbf{T}_{11} \\ \mathbf{T}_{22} \\ \mathbf{T}_{33} \\ \mathbf{T}_{12} \\ \mathbf{T}_{23} \\ \mathbf{T}_{13} \end{bmatrix} \quad (1.436)$$

y $[\mathcal{M}]$ la matriz de transformación para las componentes de un tensor de segundo orden cuando éstas están expresadas en Notación de Voigt, explícitamente $[\mathcal{M}]$ viene dada por:

$$[\mathcal{M}] = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & a_{13}^2 & 2a_{11}a_{12} & 2a_{12}a_{13} & 2a_{11}a_{13} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & a_{23}^2 & 2a_{21}a_{22} & 2a_{22}a_{23} & 2a_{21}a_{23} \\ a_{31}^2 & a_{32}^2 & a_{33}^2 & 2a_{31}a_{32} & 2a_{32}a_{33} & 2a_{31}a_{33} \\ a_{21}a_{11} & a_{22}a_{12} & a_{13}a_{23} & (a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21}) & (a_{13}a_{22} + a_{12}a_{23}) & (a_{13}a_{21} + a_{11}a_{23}) \\ a_{31}a_{21} & a_{32}a_{22} & a_{33}a_{23} & (a_{31}a_{22} + a_{32}a_{21}) & (a_{33}a_{22} + a_{32}a_{23}) & (a_{33}a_{21} + a_{31}a_{23}) \\ a_{31}a_{11} & a_{32}a_{12} & a_{33}a_{13} & (a_{31}a_{12} + a_{32}a_{11}) & (a_{33}a_{12} + a_{32}a_{13}) & (a_{33}a_{11} + a_{31}a_{13}) \end{bmatrix} \quad (1.437)$$

Ejemplo 1.38: Considérese que las componentes del tensor \mathbf{T} según la dirección x_3 son iguales a cero, es decir, $T_{13} = T_{23} = T_{33} = 0$. Obtener las componentes T'_{11} , T'_{22} , T'_{12} , tras un cambio de base en el plano $x_1 - x_2$ tal como se indica en la figura abajo



Obtener también el valor de θ correspondiente a las direcciones principales de \mathbf{T} .
OBS.: Utilizar notación de Voigt, y expresar los resultados en función de 2θ .

Solución:

Podemos utilizar directamente la ley de transformación obtenida en (1.435). En este caso particular la matriz de transformación $[\mathcal{M}]$, dada por (1.437), tras eliminar filas y columnas asociadas con la dirección x_3 queda:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} \\ T'_{22} \\ T'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}^2 & a_{12}^2 & 2a_{11}a_{12} \\ a_{21}^2 & a_{22}^2 & 2a_{21}a_{22} \\ a_{21}a_{11} & a_{22}a_{12} & a_{11}a_{22} + a_{12}a_{21} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix}$$

La matriz de transformación (a_{ij}) en el plano viene dada en función de un único parámetro, θ :

$$a_{ij} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resultando así que:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} \\ T'_{22} \\ T'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos^2 \theta & \sin^2 \theta & 2\cos \theta \sin \theta \\ \sin^2 \theta & \cos^2 \theta & -2\sin \theta \cos \theta \\ -\sin \theta \cos \theta & \cos \theta \sin \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix}$$

Tomando partido de las siguientes relaciones trigonométricas, $2 \cos \theta \sin \theta = \sin 2\theta$, $\cos^2 \theta - \sin^2 \theta = \cos 2\theta$, $\sin^2 \theta = \frac{1 - \cos 2\theta}{2}$, $\cos^2 \theta = \frac{1 + \cos 2\theta}{2}$, obtenemos que:

$$\begin{bmatrix} T'_{11} \\ T'_{22} \\ T'_{12} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) & \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) & \sin 2\theta \\ \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right) & \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right) & -\sin 2\theta \\ \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right) & \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right) & \cos 2\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} T_{11} \\ T_{22} \\ T_{12} \end{bmatrix}$$

Explícitamente las componentes vienen dadas por:

$$\begin{cases} T'_{11} = \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)T_{11} + \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)T_{22} + T_{12} \sin 2\theta \\ T'_{22} = \left(\frac{1 - \cos 2\theta}{2}\right)T_{11} - \left(\frac{1 + \cos 2\theta}{2}\right)T_{22} - T_{12} \sin 2\theta \\ T'_{12} = \left(-\frac{\sin 2\theta}{2}\right)T_{11} + \left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)T_{22} + T_{12} \cos 2\theta \end{cases}$$

Reestructurando la expresión anterior aún podemos decir que:

$$\begin{cases} T'_{11} = \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2}\right) + \left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right) \cos 2\theta + T_{12} \sin 2\theta \\ T'_{22} = \left(\frac{T_{11} + T_{22}}{2}\right) - \left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right) \cos 2\theta - T_{12} \sin 2\theta \\ T'_{12} = -\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right) \sin 2\theta + T_{12} \cos 2\theta \end{cases}$$

Recordemos que las direcciones principales se caracterizan por la ausencia de las componentes tangenciales, es decir, $T_{ij} = 0$ para $i \neq j$. Si queremos encontrar las direcciones principales en el caso plano hacemos que $T'_{12} = 0$, obteniendo así:

$$\begin{aligned} T'_{12} &= -\left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right) \sin 2\theta + T_{12} \cos 2\theta = 0 \\ &\Rightarrow \left(\frac{T_{11} - T_{22}}{2}\right) \sin 2\theta = T_{12} \cos 2\theta \\ &\Rightarrow \frac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta} = \frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} \\ &\Rightarrow \operatorname{tg}(2\theta) = \frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} \end{aligned}$$

Resultando así que el ángulo correspondiente a las direcciones principales es:

$$\theta = \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{2T_{12}}{T_{11} - T_{22}} \right)$$

1.8 Campo de Tensores

Un *Campo tensorial* asocia a un tensor $\mathbf{T}(\vec{x}, t)$ cada par (\vec{x}, t) , es decir, que las componentes de $\mathbf{T}(\vec{x}, t)$ varían en el espacio \vec{x} y en el tiempo t .

Un *Campo tensorial es continuo y diferenciable* si las componentes de $\mathbf{T}(\vec{x}, t)$ son funciones continuas y diferenciables.

Si las componentes son funciones solamente de \vec{x} , decimos que el campo tensorial es *estacionario*.

Como ejemplo de campo de tensores, consideremos el campo escalar de temperatura $T(\vec{x}, t)$ donde en el tiempo $t = t_1$ tenemos en cada punto del espacio (\vec{x}) una temperatura $T(\vec{x}, t_1)$, ver Figura 1.31(a). Otro ejemplo, podemos citar el campo de velocidades $\vec{v}(\vec{x}, t)$, ver Figura 1.31(b), donde en cada punto, en el tiempo $t = t_1$, está asociado un vector \vec{v} .

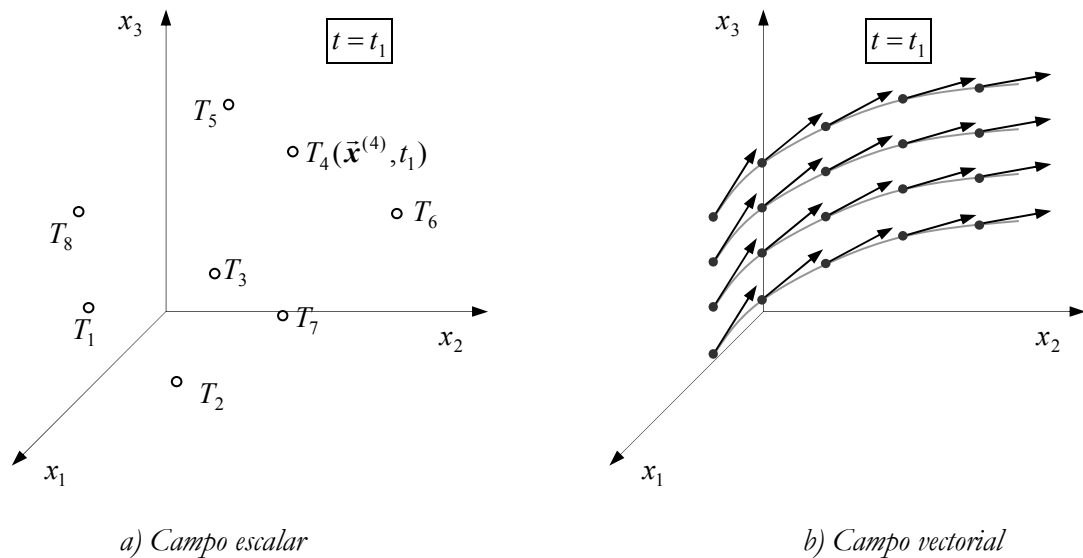


Figura 1.31: Campo de tensores en el tiempo t_1 .

Campo Escalar

Notación simbólica	$\phi = \phi(\vec{x}, t)$	
Notación indicial	$\phi = \phi(\vec{x}, t)$	(1.438)

Campo Vectorial

Notación simbólica	$\vec{v} = \vec{v}(\vec{x}, t)$	
Notación indicial	$v_i = v_i(\vec{x}, t)$	(1.439)

Campo Tensorial

Notación simbólica	$\mathbf{T} = \mathbf{T}(\vec{x}, t)$	
Notación indicial	$T_{ij} = T_{ij}(\vec{x}, t)$	(1.440)

1.8.1 Campo Escalar

Supongamos que tenemos una función escalar de la posición ($\bar{\mathbf{x}}$), diferenciable de forma continua, tal que:

$$\phi = \phi(\bar{\mathbf{x}}) \quad (1.441)$$

y por tanto existen $\partial\phi/\partial x_1$, $\partial\phi/\partial x_2$ y $\partial\phi/\partial x_3$ y son continuas en el espacio \mathbb{R}^3 . Esta función se llama *Campo Escalar*.

Considerando ahora ϕ en un segundo punto, el cual es diferenciable ($\bar{\mathbf{x}} + d\bar{\mathbf{x}}$). La diferencia de ϕ entre estos dos puntos llamamos de diferencial total de ϕ :

$$\phi(x_1 + dx_1, x_2 + dx_2, x_3 + dx_3) - \phi(x_1, x_2, x_3) \equiv d\phi \quad (1.442)$$

Para cualquier función continua $\phi(x_1, x_2, x_3)$, $d\phi$ se relaciona linealmente con dx_1 , dx_2 y dx_3 . Esta relación lineal viene dada por la regla de la cadena de diferenciación como:

$$\begin{aligned} d\phi &= \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 \\ d\phi &= \phi_{,i} dx_i \end{aligned} \quad (1.443)$$

La diferenciación de las componentes de un tensor respecto a las coordenadas x_i , se expresa mediante el operador diferencial:

$$\frac{\partial \bullet}{\partial x_i} \equiv \bullet_{,i} \quad (1.444)$$

1.8.2 Gradiente

Gradiente de un escalar

El gradiente $\nabla\phi$ o $\text{grad}\phi$ viene definido como:

$$\nabla\phi \longrightarrow d\phi = \nabla\phi \cdot d\bar{\mathbf{x}} \quad (1.445)$$

donde el operador ∇ denominamos *operador nabla*.

Expresando la definición (1.445) en la base cartesiana obtenemos que:

$$\begin{aligned} \frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 &= \\ &= [(\nabla\phi)_{x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + (\nabla\phi)_{x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + (\nabla\phi)_{x_3} \hat{\mathbf{e}}_3] \cdot [(dx_1)\hat{\mathbf{e}}_1 + (dx_2)\hat{\mathbf{e}}_2 + (dx_3)\hat{\mathbf{e}}_3] \end{aligned} \quad (1.446)$$

Resolviendo el producto escalar anterior, hallamos:

$$\frac{\partial\phi}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} dx_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} dx_3 = (\nabla\phi)_{x_1} dx_1 + (\nabla\phi)_{x_2} dx_2 + (\nabla\phi)_{x_3} dx_3 \quad (1.447)$$

con lo que concluimos que la componentes de $\nabla\phi$ en coordenadas cartesianas son:

$$(\nabla\phi)_{x_1} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \quad ; \quad (\nabla\phi)_{x_2} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad ; \quad (\nabla\phi)_{x_3} \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \quad (1.448)$$

Podemos entonces definir el gradiente en términos de componentes como:

$$\nabla\phi \equiv \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3 \quad (1.449)$$

El *operador nabla* ∇ queda definido como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i = \partial_{,i} \hat{\mathbf{e}}_i \quad \text{Operador Nabla} \quad (1.450)$$

Una vez definido el operador nabla podemos definir el *operador Laplaciano* ∇^2 :

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \nabla \cdot \nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_i \right) \cdot \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \right) = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{ij} = \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_i} \\ \nabla^2 &\equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} = \partial_{,k} \partial_{,k} = \partial_{,kk} \end{aligned} \quad (1.451)$$

Luego, el Laplaciano de un vector ($\vec{\mathbf{v}}$) viene dado por:

$$\nabla^2 \vec{\mathbf{v}} = v_{i,kk} \quad (1.452)$$

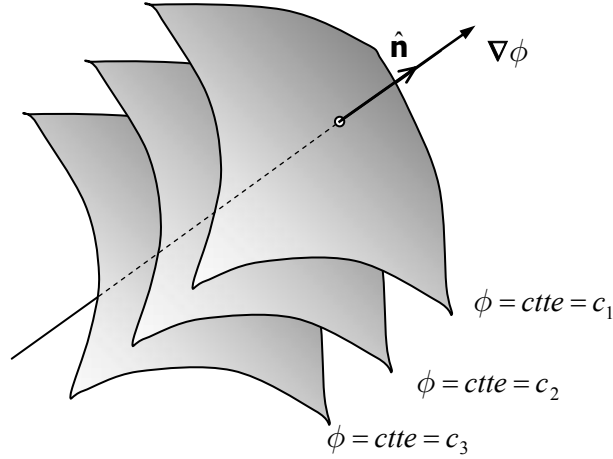
Significado Geométrico de $\nabla\phi$

- La dirección de $\nabla\phi$ es normal a la superficie $\phi = cte$. $\nabla\phi$ siempre apunta (sentido) en la dirección creciente de ϕ , ver Figura 1.32.
- La magnitud de $\nabla\phi$ es la tasa de variación de ϕ con la distancia según esta dirección.

OBS.: La superficie con $\phi = cte$ (denominada superficie de nivel) es la superficie formada por los puntos de mismo valor, es decir, al moverse por una superficie de nivel el valor de la función no cambia.

Podemos decir que la normal a esta superficie $\phi = cte$ será: $\hat{\mathbf{n}} = \nabla\phi$. Entonces:

$$\hat{\mathbf{n}} = \frac{\nabla\phi}{\|\nabla\phi\|} \quad (1.453)$$

Figura 1.32: Gradiente de ϕ .

El gradiente de un vector $\vec{\mathbf{v}}$:

$$\text{grad}(\vec{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \vec{\mathbf{v}} \quad (1.454)$$

Utilizando la definición de ∇ dada en (1.450), resulta:

$$\nabla \vec{\mathbf{v}} = \frac{\partial(v_i \hat{\mathbf{e}}_i)}{\partial x_j} \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = (v_i \hat{\mathbf{e}}_i)_{,j} \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = v_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \quad (1.455)$$

Como podemos observar el gradiente de un vector resulta ser un tensor de segundo orden cuyas componentes $v_{i,j}$ explícitamente son:

$$v_{i,j} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{bmatrix} \quad (1.456)$$

NOTA: En la literatura podemos encontrar el operador ∇ aplicado por la izquierda $\nabla \vec{\mathbf{v}}$, como definimos en (1.455), o por la derecha $\vec{\mathbf{v}} \nabla$, que definimos a continuación:

$$\vec{\mathbf{v}} \nabla = \frac{\partial}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \otimes v_i \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i = v_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_i = v_{j,i} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j = (\nabla \vec{\mathbf{v}})^T \blacksquare \quad (1.457)$$

Gradiente de un tensor de segundo orden \mathbf{T} :

$$\begin{aligned} \nabla \mathbf{T} &= \frac{\partial(T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)}{\partial x_k} \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= T_{ij,k} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j \otimes \hat{\mathbf{e}}_k \end{aligned} \quad (1.458)$$

y sus componentes son:

$$(\nabla \mathbf{T})_{ijk} \equiv T_{ij,k} \quad (1.459)$$

Ejemplo 1.39: Encuentre el gradiente de la función $f(x_1, x_2) = \sin(x_1) + \exp^{x_1 x_2}$ en el punto (0,1).

Solución:

Por definición el gradiente de una función escalar viene definido de la forma:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2$$

donde:

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \cos(x_1) + x_2 \exp^{x_1 x_2} \quad ; \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = x_1 \exp^{x_1 x_2}$$

$$\nabla f(x_1, x_2) = [\cos(x_1) + x_2 \exp^{x_1 x_2}] \hat{\mathbf{e}}_1 + [x_1 \exp^{x_1 x_2}] \hat{\mathbf{e}}_2$$

$$\nabla f(0,1) = [2] \hat{\mathbf{e}}_1 + [0] \hat{\mathbf{e}}_2 = 2\hat{\mathbf{e}}_1$$

1.8.3 Divergencia

Divergencia de un vector ($\bar{\mathbf{v}}$) viene denotada por:

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} \quad (1.460)$$

que por definición es igual a:

$$\text{div}(\bar{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \nabla \bar{\mathbf{v}} : \mathbf{1} = \text{Tr}(\nabla \bar{\mathbf{v}}) \quad (1.461)$$

Luego:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \nabla \bar{\mathbf{v}} : \mathbf{1} &= [v_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j] : [\delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l] \\ &= v_{i,j} \delta_{kl} \delta_{ik} \delta_{jl} \\ &= v_{k,k} \\ &= \frac{\partial v_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_2}{\partial x_2} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{aligned} \quad (1.462)$$

o aún:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \nabla \bar{\mathbf{v}} : \mathbf{1} &= [v_{i,j} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j] : [\delta_{kl} \hat{\mathbf{e}}_k \otimes \hat{\mathbf{e}}_l] \\ &= [v_{i,j} \delta_{kl} \delta_{lj} \hat{\mathbf{e}}_i] \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= [v_{i,k} \hat{\mathbf{e}}_i] \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \frac{\partial [v_i \hat{\mathbf{e}}_i]}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \end{aligned} \quad (1.463)$$

Con lo que definimos que:

$$\boxed{\nabla \cdot (\bullet) = \frac{\partial (\bullet)}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k} \quad \text{Divergencia de } (\bullet) \quad (1.464)$$

Podemos además verificar que la divergencia disminuye el orden de un tensor.

Divergencia de un tensor de segundo orden \mathbf{T}

La divergencia de un tensor de segundo orden \mathbf{T} es $\nabla \cdot \mathbf{T} = \nabla \mathbf{T} : \mathbf{1}$, lo que resulta ser un vector:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{T} \equiv \text{div} \mathbf{T} &= \frac{\partial (T_{ij} \hat{\mathbf{e}}_i \otimes \hat{\mathbf{e}}_j)}{\partial x_k} \cdot \hat{\mathbf{e}}_k \\ &= \frac{\partial T_{ij}}{\partial x_k} \delta_{jk} \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= T_{ik,k} \hat{\mathbf{e}}_i \end{aligned} \quad (1.465)$$

Ejemplo 1.40: Probar la identidad:

$$\nabla \cdot (\bar{\mathbf{a}} + \bar{\mathbf{b}}) = \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{b}}$$

Solución:

Considerando que $\bar{\mathbf{a}} = a_j \hat{\mathbf{e}}_j$ y $\bar{\mathbf{b}} = b_k \hat{\mathbf{e}}_k$ y $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ podemos expresar el primer miembro de la identidad como:

$$\frac{\partial (a_j \hat{\mathbf{e}}_j + b_k \hat{\mathbf{e}}_k)}{\partial x_i} \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_j \cdot \hat{\mathbf{e}}_i + \frac{\partial b_k}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_i = \frac{\partial a_i}{\partial x_i} + \frac{\partial b_i}{\partial x_i} = \nabla \cdot \bar{\mathbf{a}} + \nabla \cdot \bar{\mathbf{b}} \quad \text{c.q.d.}$$

Ejemplo 1.41: Obtener las componentes de $(\bar{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{a}}$.

Solución:

Considerando: $\bar{\mathbf{a}} = a_j \hat{\mathbf{e}}_j$; $\bar{\mathbf{b}} = b_k \hat{\mathbf{e}}_k$ y $\nabla = \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i}$ ($i=1,2,3$) podemos decir que:

$$(\bar{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \bar{\mathbf{a}} = \left(b_k \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{\mathbf{e}}_i \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (a_j \hat{\mathbf{e}}_j) = \left(b_k \delta_{ki} \frac{\partial}{\partial x_i} \right) (a_j \hat{\mathbf{e}}_j) = b_k \delta_{ki} \frac{\partial a_j}{\partial x_i} \hat{\mathbf{e}}_j = b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \hat{\mathbf{e}}_j$$

Expandiendo el índice mudo k :

$$b_k \frac{\partial a_j}{\partial x_k} = b_1 \frac{\partial a_j}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_j}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial a_j}{\partial x_3}$$

luego:

$$j=1 \Rightarrow b_1 \frac{\partial a_1}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_1}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial a_1}{\partial x_3}$$

$$j=2 \Rightarrow b_1 \frac{\partial a_2}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_2}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial a_2}{\partial x_3}$$

$$j=3 \Rightarrow b_1 \frac{\partial a_3}{\partial x_1} + b_2 \frac{\partial a_3}{\partial x_2} + b_3 \frac{\partial a_3}{\partial x_3}$$

Ejemplo 1.42: Probar que la siguiente relación es válida:

$$\nabla \cdot \left(\frac{\bar{\mathbf{q}}}{T} \right) = \frac{1}{T} \nabla \cdot \bar{\mathbf{q}} - \frac{1}{T^2} \bar{\mathbf{q}} \cdot \nabla T$$

donde $\bar{\mathbf{q}}(\bar{\mathbf{x}}, t)$ es un vector arbitrario y $T(\bar{\mathbf{x}}, t)$ un escalar.

Solución:

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot \left(\frac{\vec{\mathbf{q}}}{T} \right) &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{q_i}{T} \right) = \left(\frac{q_i}{T} \right)_{,i} \\
&= \frac{1}{T} q_{i,i} - \frac{1}{T^2} q_i T_{,i} \\
&= \frac{1}{T} \nabla \cdot \vec{\mathbf{q}} - \frac{1}{T^2} \vec{\mathbf{q}} \cdot \nabla T
\end{aligned}$$

1.8.4 Rotacional

Rotacional de un vector

El rotacional de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ se representa por: $\text{rot}(\vec{\mathbf{v}}) \equiv \nabla \wedge \vec{\mathbf{v}}$. Utilizando la definición de producto vectorial obtenemos el rotacional de un vector como:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\vec{\mathbf{v}}) = \nabla \wedge \vec{\mathbf{v}} &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = \epsilon_{ijk} v_{k,j} \hat{\mathbf{e}}_i \\
&= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3
\end{aligned} \tag{1.466}$$

donde ϵ_{ijk} es el símbolo de permutación definido en (1.56).

Verifiquemos que la parte antisimétrica del gradiente del vector $\vec{\mathbf{v}}$, representado por $(\nabla \vec{\mathbf{v}})^{anti} \equiv \mathbf{W}$ tiene como componentes:

$$\begin{aligned}
[(\nabla \vec{\mathbf{v}})^{anti}]_{ij} \equiv v_{i,j}^{anti} &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ W_{21} & 0 & W_{23} \\ W_{31} & W_{32} & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & W_{12} & W_{13} \\ -W_{12} & 0 & W_{23} \\ -W_{13} & -W_{23} & 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} 0 & -w_3 & w_2 \\ w_3 & 0 & -w_1 \\ -w_2 & w_1 & 0 \end{bmatrix}
\end{aligned} \tag{1.467}$$

donde w_1, w_2, w_3 son las componentes del vector axial $\vec{\mathbf{w}}$ correspondiente al tensor antisimétrico \mathbf{W} , ver subapartado 1.5.3.2.2. Tensor Antisimétrico.

Si retomamos la definición del rotacional (1.466) y teniendo en consideración (1.467), podemos decir que:

$$\begin{aligned}
\text{rot}(\vec{\mathbf{v}}) = \nabla \wedge \vec{\mathbf{v}} &= \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= 2W_{32} \hat{\mathbf{e}}_1 + 2W_{13} \hat{\mathbf{e}}_2 + 2W_{21} \hat{\mathbf{e}}_3 \\
&= 2(w_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + w_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + w_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \\
&= 2\vec{\mathbf{w}}
\end{aligned} \tag{1.468}$$

Además si recurrimos a la identidad (1.132), podemos decir que se cumple que:

$$\begin{aligned}
\mathbf{W} \cdot \vec{\mathbf{v}} &= \vec{\mathbf{w}} \wedge \vec{\mathbf{v}} \\
&= \frac{1}{2} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{v}}) \wedge \vec{\mathbf{v}}
\end{aligned} \tag{1.469}$$

Resumen

\bullet	Divergencia $\text{div}(\bullet) \equiv \nabla \cdot \bullet$	Rotacional $\text{rot}(\bullet) \equiv \nabla \wedge \bullet$	Gradiente $\text{grad}(\bullet) \equiv \nabla \bullet$
Escalar	Escalar	Rotacional	vector
Vector	Escalar	Vector	Tensor (2 ^{ndo} orden)
Tensor (2 ^{ndo} orden)	Vector	Tensor (2 ^{ndo} orden)	Tensor (3 ^{er} orden)

A continuación haremos algunas demostraciones de algunas identidades.

- $\text{rot}(\lambda \vec{\mathbf{a}}) = \nabla \wedge (\lambda \vec{\mathbf{a}}) = \lambda (\nabla \wedge \vec{\mathbf{a}}) + (\nabla \lambda \wedge \vec{\mathbf{a}})$

El resultado de la operación $\nabla \wedge (\lambda \vec{\mathbf{a}})$ será un vector, cuyas componentes vienen dadas por:

$$\begin{aligned}
[\nabla \wedge (\lambda \vec{\mathbf{a}})]_i &= \epsilon_{ijk} (\lambda a_k)_{,j} \\
&= \epsilon_{ijk} (\lambda_{,j} a_k + \lambda a_{k,j}) \\
&= \epsilon_{ijk} \lambda a_{k,j} + \epsilon_{ijk} \lambda_{,j} a_k \\
&= \lambda (\nabla \wedge \vec{\mathbf{a}})_i + \epsilon_{ijk} (\nabla \lambda)_j a_k \\
&= \lambda (\nabla \wedge \vec{\mathbf{a}})_i + (\nabla \lambda \wedge \vec{\mathbf{a}})_i
\end{aligned} \tag{1.470}$$

con lo que comprobamos la identidad: $\text{rot}(\lambda \vec{\mathbf{a}}) = \nabla \wedge (\lambda \vec{\mathbf{a}}) = \lambda (\nabla \wedge \vec{\mathbf{a}}) + (\nabla \lambda \wedge \vec{\mathbf{a}})$.

- $\nabla \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}}) = \vec{\mathbf{a}} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{b}}) - \vec{\mathbf{b}} (\nabla \cdot \vec{\mathbf{a}}) + (\vec{\mathbf{b}} \cdot \nabla) \vec{\mathbf{a}} - (\vec{\mathbf{a}} \cdot \nabla) \vec{\mathbf{b}}$

Las componentes del producto vectorial $(\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}})$ vienen dadas por $(\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}})_k = \epsilon_{kij} a_i b_j$. Luego:

$$\begin{aligned}
[\nabla \wedge (\vec{\mathbf{b}} \wedge \vec{\mathbf{a}})]_l &= \epsilon_{lpk} (\epsilon_{kij} a_i b_j)_{,p} \\
&= \epsilon_{kij} \epsilon_{lpk} (a_{i,p} b_j + a_i b_{j,p})
\end{aligned} \tag{1.471}$$

Considerando que $\epsilon_{kij} = \epsilon_{ijk}$, el resultado de $\epsilon_{ijk}\epsilon_{lpk} = \delta_{il}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jl}$ y reemplazando en la expresión anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} [\nabla \wedge (\bar{\mathbf{b}} \wedge \bar{\mathbf{a}})]_l &= \epsilon_{kij}\epsilon_{lpk} (\mathbf{a}_{i,p}\mathbf{b}_j + \mathbf{a}_l\mathbf{b}_{j,p}) \\ &= (\delta_{il}\delta_{jp} - \delta_{ip}\delta_{jl})(\mathbf{a}_{i,p}\mathbf{b}_j + \mathbf{a}_l\mathbf{b}_{j,p}) \\ &= \delta_{il}\delta_{jp}\mathbf{a}_{i,p}\mathbf{b}_j - \delta_{ip}\delta_{jl}\mathbf{a}_{i,p}\mathbf{b}_j + \delta_{il}\delta_{jp}\mathbf{a}_l\mathbf{b}_{j,p} - \delta_{ip}\delta_{jl}\mathbf{a}_l\mathbf{b}_{j,p} \\ &= \mathbf{a}_{l,p}\mathbf{b}_p - \mathbf{a}_{p,p}\mathbf{b}_l + \mathbf{a}_l\mathbf{b}_{p,p} - \mathbf{a}_p\mathbf{b}_{l,p} \end{aligned} \quad (1.472)$$

Podemos observar que $[(\bar{\mathbf{b}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{a}}]_l = \mathbf{a}_{l,p}\mathbf{b}_p$, $[\bar{\mathbf{b}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}})]_l = \mathbf{a}_{p,p}\mathbf{b}_l$, $[\bar{\mathbf{a}}(\nabla \cdot \bar{\mathbf{b}})]_l = \mathbf{a}_l\mathbf{b}_{p,p}$, $[(\bar{\mathbf{a}} \cdot \nabla)\bar{\mathbf{b}}]_l = \mathbf{a}_p\mathbf{b}_{l,p}$.

$$\blacksquare \quad \nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{\mathbf{a}}) = \nabla \wedge (\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}}) - \nabla^2 \bar{\mathbf{a}}$$

Las componentes del producto vectorial $(\nabla \wedge \bar{\mathbf{a}})$ vienen dadas por $(\nabla \wedge \bar{\mathbf{a}})_i = \underbrace{\epsilon_{ijk}}_{c_i} \mathbf{a}_{k,j}$. Luego:

$$\begin{aligned} [\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{\mathbf{a}})]_q &= \epsilon_{qli} (\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_{k,j})_{,l} \\ &= \epsilon_{qli} \epsilon_{ijk} \mathbf{a}_{k,jl} \end{aligned} \quad (1.473)$$

Considerando que $\epsilon_{qli}\epsilon_{ijk} = \epsilon_{qli}\epsilon_{jki} = \delta_{qj}\delta_{lk} - \delta_{qk}\delta_{lj}$, la expresión anterior queda:

$$\begin{aligned} [\nabla \wedge (\nabla \wedge \bar{\mathbf{a}})]_q &= \epsilon_{qli}\epsilon_{ijk} \mathbf{a}_{k,jl} \\ &= (\delta_{qj}\delta_{lk} - \delta_{qk}\delta_{lj}) \mathbf{a}_{k,jl} \\ &= \delta_{qj}\delta_{lk} \mathbf{a}_{k,jl} - \delta_{qk}\delta_{lj} \mathbf{a}_{k,jl} \\ &= \mathbf{a}_{k,kq} - \mathbf{a}_{q,ll} \end{aligned} \quad (1.474)$$

Podemos observar que $[\nabla(\nabla \cdot \bar{\mathbf{a}})]_q = \mathbf{a}_{k,kq}$ y $[\nabla^2 \bar{\mathbf{a}}]_q = \mathbf{a}_{q,ll}$.

$$\blacksquare \quad \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) = \psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi)$$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) &= (\phi \psi_{,i})_{,i} \\ &= \phi \psi_{,ii} + \phi_{,i} \psi_{,i} \\ &= \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \end{aligned} \quad (1.475)$$

donde ϕ y ψ son funciones escalares.

Otra identidad interesante que origina de la anterior es:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) &= \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \\ \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \psi \nabla^2 \phi + (\nabla \psi) \cdot (\nabla \phi) \end{aligned} \quad (1.476)$$

Restando las dos identidades anteriores obtenemos que:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\phi \nabla \psi) - \nabla \cdot (\psi \nabla \phi) &= \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \\ \Rightarrow \nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) &= \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \end{aligned} \quad (1.477)$$

1.8.5 Campo Conservativo

Un campo vectorial $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ se denomina conservativo si existe un campo escalar (ϕ) diferenciables tal que:

$$\vec{\mathbf{b}} = \nabla \phi \quad (1.478)$$

Si la función ϕ cumple la relación (1.478) decimos que ϕ es una *función potencial* de $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$.

Un condición necesaria, pero no suficiente, para que $\vec{\mathbf{b}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$ sea conservativo es que $\nabla \wedge \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}}$. En otras palabras, todo campo conservativo el rotacional es nulo, pero ni todo rotacional nulo implica un campo conservativo.

Ejemplo 1.43: Probar que $\nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{\mathbf{u}}) = 0$ y que $\nabla \wedge (\nabla \phi) = \vec{\mathbf{0}}$, donde ϕ es un escalar.

Solución:

Considerando: $\nabla \wedge \vec{\mathbf{u}} = \epsilon_{ijk} u_{k,j} \hat{\mathbf{e}}_i$

$$\begin{aligned} \nabla \cdot (\nabla \wedge \vec{\mathbf{u}}) &= \frac{\partial}{\partial x_l} (\epsilon_{ijk} u_{k,j} \hat{\mathbf{e}}_i) \cdot \hat{\mathbf{e}}_l \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_l} (u_{k,j}) \delta_{il} \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_i} (u_{k,j}) \\ &= \epsilon_{ijk} u_{k,ji} \end{aligned}$$

La segunda derivada de $\vec{\mathbf{u}}$ es simétrica en ij , *i.e.* $u_{k,ji} = u_{k,ij}$, mientras que ϵ_{ijk} es antisimétrico en ij , *i.e.*, $\epsilon_{ijk} = -\epsilon_{jik}$, luego:

$$\epsilon_{ijk} u_{k,ji} = \epsilon_{ij1} u_{1,ji} + \epsilon_{ij2} u_{2,ji} + \epsilon_{ij3} u_{3,ji} = 0$$

Observar que $\epsilon_{ij1} u_{1,ji}$ es el doble producto escalar de un tensor simétrico con un antisimétrico, cuyo resultado es cero.

Análogamente demostramos que:

$$\nabla \wedge (\nabla \phi) = \epsilon_{ijk} \phi_{,kj} \hat{\mathbf{e}}_i = 0_i \hat{\mathbf{e}}_i = \vec{\mathbf{0}}$$

1.9 Teoremas con Integrales

1.9.1 Integración por Partes

La expresión de la integración por partes viene dada por:

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x)dx \quad (1.479)$$

donde $v'(x) = \frac{dv}{dx}$, y las funciones $u(x)$, $v(x)$ tienen que ser diferenciables en el intervalo $a \leq x \leq b$.

1.9.2 Teorema de la Divergencia

Dado un medio continuo \mathcal{B} de volumen V , y contorno S , el teorema de la divergencia (o teorema de Gauss) para un vector $\vec{\mathbf{v}}$ está dado por:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} dV = \int_S \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \vec{\mathbf{v}} \cdot d\vec{S} \quad (1.480)$$

$$\int_V v_{i,i} dV = \int_S v_i \hat{n}_i dS = \int_S v_i dS_i$$

donde $\hat{\mathbf{n}}$ es el vector unitario y exterior a la superficie S que contiene el volumen V en el que está definido el campo vectorial.

Para un tensor de segundo orden:

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{T} dV = \int_S \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS = \int_S \mathbf{T} \cdot d\vec{S} \quad (1.481)$$

$$\int_V T_{ij,j} dV = \int_S T_{ij} \hat{n}_j dS = \int_S T_{ij} dS_j$$

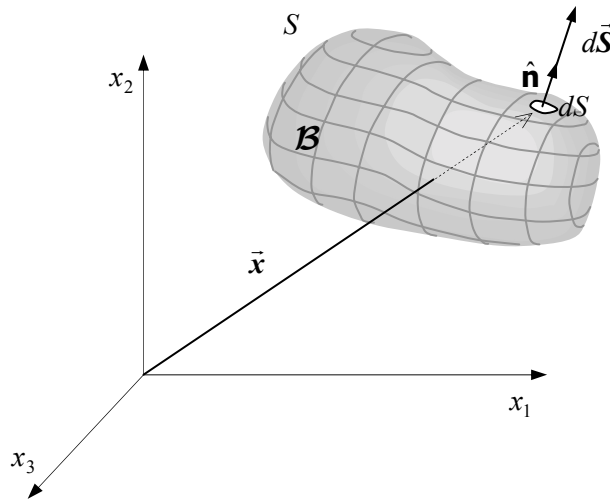


Figura 1.33.

Partiendo del teorema de la divergencia también podemos verificar que se cumplen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned}
 \int_V (x_i)_{,j} dV &= \int_V (\delta_{ik} x_i)_{,j} dV &&= \int_S \delta_{ik} x_i \hat{n}_j dS \\
 &= \int_V [\delta_{ik,j} x_i + \delta_{ik} x_{i,j}] dV &&= \int_S x_k \hat{n}_j dS \\
 &= \int_V x_{k,j} dV &&= \int_S x_k \hat{n}_j dS
 \end{aligned} \tag{1.482}$$

donde hemos considerado que $\delta_{ik,j} = 0_{ikj}$, y además considerando que $x_{k,j} = \delta_{kj}$, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
 \delta_{kj} \int_V dV = \int_S x_k \hat{n}_j dS &\Rightarrow V \delta_{kj} = \int_S x_k \hat{n}_j dS \\
 &V \mathbf{1} = \int_S \bar{\mathbf{x}} \otimes \hat{\mathbf{n}} dS
 \end{aligned} \tag{1.483}$$

También se cumple que:

$$\begin{aligned}
 \int_V (x_i \sigma_{jk})_{,k} dV &= \int_V (x_i \sigma_{jk})_{,k} dV = \int_S x_i \sigma_{jk} \hat{n}_k dS \\
 &= \int_V [x_{i,k} \sigma_{jk} + x_i \sigma_{jk,k}] dV = \int_S x_i \sigma_{jk} \hat{n}_k dS \\
 &= \int_V [\delta_{ik} \sigma_{jk} + x_i \sigma_{jk,k}] dV = \int_S x_i \sigma_{jk} \hat{n}_k dS
 \end{aligned} \tag{1.484}$$

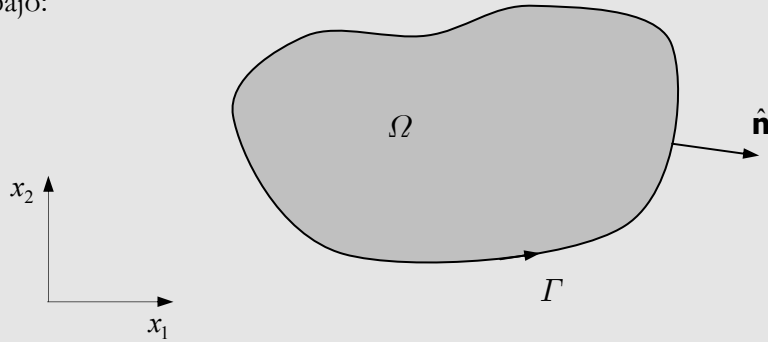
Resultando que:

$$\begin{aligned}
 \int_V x_i \sigma_{jk,k} dV &= \int_S x_i \sigma_{jk} \hat{n}_k dS - \int_V \sigma_{ji} dV \\
 \int_V \bar{\mathbf{x}} \otimes \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV &= \int_S \bar{\mathbf{x}} \otimes (\boldsymbol{\sigma} \cdot \hat{\mathbf{n}}) dS - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T dV
 \end{aligned} \tag{1.485}$$

ó bien

$$\int_V \bar{\mathbf{x}} \otimes \nabla \cdot \boldsymbol{\sigma} dV = \int_S (\bar{\mathbf{x}} \otimes \boldsymbol{\sigma}) \cdot d\vec{S} - \int_V \boldsymbol{\sigma}^T dV \tag{1.486}$$

Ejemplo 1.44: Sea un dominio de área Ω delimitado por el contorno Γ como muestra figura abajo:



Considérese también que \mathbf{m} es un tensor de segundo orden y ω un escalar. Demostrar que se cumple la siguiente relación:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{m} : \nabla(\nabla\omega)] d\Omega = \int_{\Gamma} [(\nabla\omega) \cdot \mathbf{m}] \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} [(\nabla \cdot \mathbf{m}) \cdot \nabla\omega] d\Omega$$

Solución: Se puede aplicar directamente la definición de integración por partes para la demostración. Pero partiremos de la definición del teorema de la divergencia. Luego dado un tensor $\vec{\mathbf{v}}$ se cumple que:

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} d\Omega = \int_{\Gamma} \vec{\mathbf{v}} \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma \xrightarrow{\text{indicial}} \int_{\Omega} v_{j,j} d\Omega = \int_{\Gamma} v_j \hat{n}_j d\Gamma$$

Pero si consideramos que el tensor $\vec{\mathbf{v}}$ es el resultante de la operación $\vec{\mathbf{v}} = \nabla\omega \cdot \mathbf{m}$ y lo equivalente en notación indicial $v_j = \omega_{,i} m_{ij}$ y reemplazándolo en la expresión anterior obtenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} v_{j,j} d\Omega &= \int_{\Gamma} v_j \hat{n}_j d\Gamma \Rightarrow \int_{\Omega} [\omega_{,i} m_{ij}]_{,j} d\Omega = \int_{\Gamma} v_j \hat{n}_j d\Gamma \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} [\omega_{,ij} m_{ij} + \omega_{,i} m_{ij,j}] d\Omega = \int_{\Gamma} \omega_{,i} m_{ij} \hat{n}_j d\Gamma \\ &\Rightarrow \int_{\Omega} [\omega_{,ij} m_{ij}] d\Omega = \int_{\Gamma} \omega_{,i} m_{ij} \hat{n}_j d\Gamma - \int_{\Omega} [\omega_{,i} m_{ij,j}] d\Omega \end{aligned}$$

Lo equivalente en notación tensorial:

$$\int_{\Omega} [\mathbf{m} : \nabla(\nabla\omega)] d\Omega = \int_{\Gamma} [(\nabla\omega) \cdot \mathbf{m}] \cdot \hat{\mathbf{n}} d\Gamma - \int_{\Omega} [\nabla\omega \cdot (\nabla \cdot \mathbf{m})] d\Omega \quad c.q.d.$$

NOTA: Si consideramos ahora un dominio de volumen V delimitado por una superficie S con normal $\hat{\mathbf{n}}$ y sea $\vec{\mathbf{N}}$ un vector y T un escalar también se cumple que:

$$\begin{aligned} \int_V N_i T_{,ij} dV &= \int_S N_i T_{,i} \hat{n}_j dS - \int_V N_{i,j} T_{,i} dV \\ &\Rightarrow \int_V \vec{\mathbf{N}} \cdot \nabla(\nabla T) dV = \int_S (\nabla T \cdot \vec{\mathbf{N}}) \otimes \hat{\mathbf{n}} dS - \int_V \nabla T \cdot \nabla \vec{\mathbf{N}} dV \end{aligned}$$

donde hemos aplicado directamente la definición de integración por partes.

1.9.3 Independencia del Camino

Una curva que conecta dos puntos A y B denominamos de camino de A a B . A continuación, establecemos las condiciones con las cuales una integral de línea es independiente del camino en una determinada región, ver Figura 1.34.

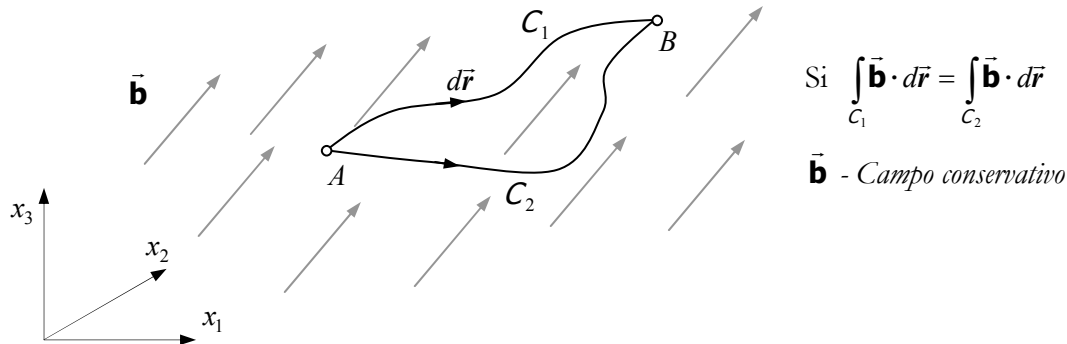


Figura 1.34: Independencia del camino.

Luego, dado un campo vectorial $\vec{\mathbf{b}}$ continuo, la integral $\int_C \vec{\mathbf{b}} \cdot d\vec{\mathbf{r}}$ es *independiente del camino* si y solo si $\vec{\mathbf{b}}$ es un *campo conservativo*. Como consecuencia, existe un campo escalar ϕ tal que $\vec{\mathbf{b}} = \nabla\phi$.

Con eso podemos concluir que:

$$\int_A^B \vec{\mathbf{b}} \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_A^B \nabla\phi \cdot d\vec{\mathbf{r}} \quad (1.487)$$

$$\int_A^B (b_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + b_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + b_3 \hat{\mathbf{e}}_3) \cdot d\vec{\mathbf{r}} = \int_A^B \left(\frac{\partial\phi}{\partial x_1} \hat{\mathbf{e}}_1 + \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \hat{\mathbf{e}}_2 + \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \hat{\mathbf{e}}_3 \right) \cdot d\vec{\mathbf{r}}$$

Luego

$$b_1 = \frac{\partial\phi}{\partial x_1} \quad ; \quad b_2 = \frac{\partial\phi}{\partial x_2} \quad ; \quad b_3 = \frac{\partial\phi}{\partial x_3} \quad (1.488)$$

Como el campo es conservativo el rotacional es cero:

$$\nabla \wedge \vec{\mathbf{b}} = \vec{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = 0_i \quad (1.489)$$

Concluyendo que:

$$\begin{cases} \frac{\partial b_3}{\partial x_2} - \frac{\partial b_2}{\partial x_3} = 0 \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_3} - \frac{\partial b_3}{\partial x_1} = 0 \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} - \frac{\partial b_1}{\partial x_2} = 0 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \frac{\partial b_3}{\partial x_2} = \frac{\partial b_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial b_1}{\partial x_3} = \frac{\partial b_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial b_2}{\partial x_1} = \frac{\partial b_1}{\partial x_2} \end{cases} \quad (1.490)$$

Luego, si no se cumple la condición anterior el campo no es conservativo.

1.9.4 Teorema de Kelvin-Stokes

Sea una superficie regular S y sea un campo vectorial $\vec{\mathbf{F}}(\vec{\mathbf{x}}, t)$.

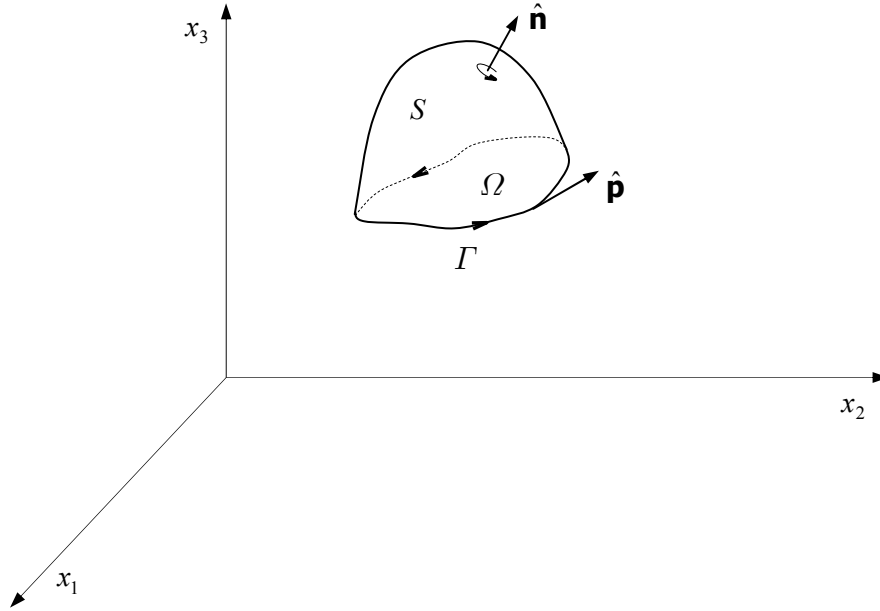


Figura 1.35: Teorema de Stokes.

Según el Teorema de Kelvin-Stokes:

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{\Omega} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.491)$$

Si adoptamos un versor tangente al contorno Γ denominado por $\hat{\mathbf{p}}$ el teorema de Stokes queda:

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{p}} d\Gamma = \int_{\Omega} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}}) \cdot d\vec{\mathbf{S}} = \int_{\Omega} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.492)$$

Representamos los vectores en la base cartesiana como $\vec{\mathbf{F}} = F_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + F_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + F_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, el vector de área como $d\vec{\mathbf{S}} = dS_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dS_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dS_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, y $d\vec{\Gamma} = dx_1 \hat{\mathbf{e}}_1 + dx_2 \hat{\mathbf{e}}_2 + dx_3 \hat{\mathbf{e}}_3$. Las componentes del rotacional de $\vec{\mathbf{F}}$ son:

$$\begin{aligned} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}})_i &= \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 & \hat{\mathbf{e}}_2 & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \\ &= \left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3} \right) \hat{\mathbf{e}}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1} \right) \hat{\mathbf{e}}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2} \right) \hat{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (1.493)$$

Con lo cual podemos expresar el teorema de Stokes en componentes como:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}_1 dx_1 + \mathbf{F}_2 dx_2 + \mathbf{F}_3 dx_3 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_2} - \frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_3} \right) dS_1 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_3} - \frac{\partial \mathbf{F}_3}{\partial x_1} \right) dS_2 + \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_2} \right) dS_3 \quad (1.494)$$

Como caso particular podemos tener que la superficie S coincide con el plano Ω como muestra figura abajo, en este caso sigue siendo válida la expresión (1.494).

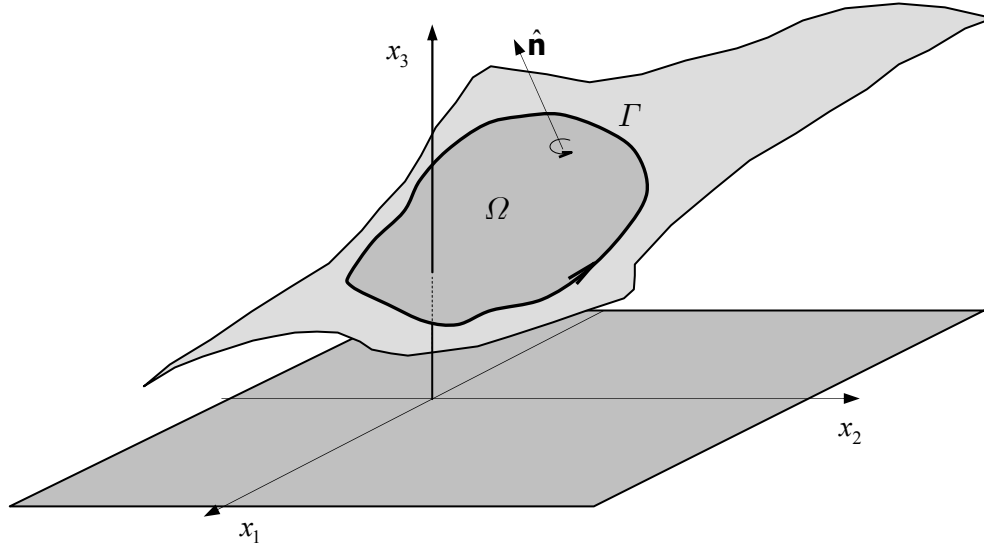


Figura 1.36.

Otro caso particular es cuando la región Ω está toda contenida en el plano $x_1 - x_2$.

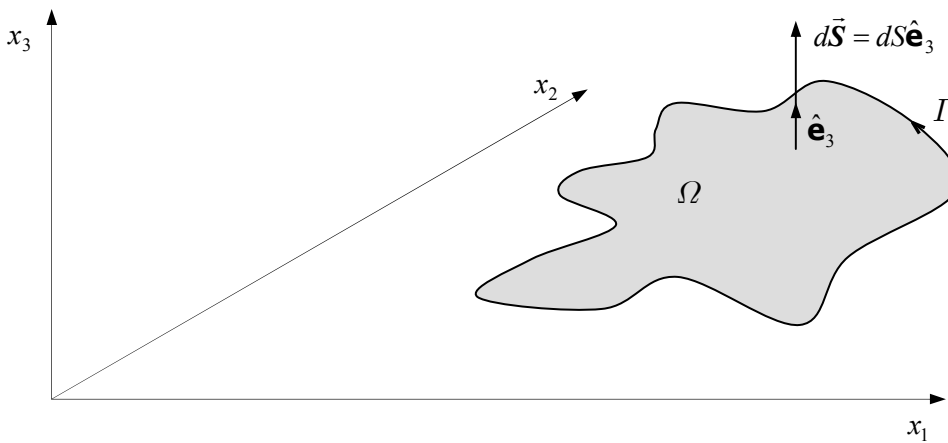


Figura 1.37: Teorema de Green.

$$\oint_{\Gamma} \vec{\mathbf{F}} \cdot d\vec{\Gamma} = \int_{\Omega} (\nabla \wedge \vec{\mathbf{F}}) \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 dS \quad (1.495)$$

Que es conocida como el teorema de Stokes en el plano o teorema de Green. En componentes queda:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F}_1 dx_1 + \mathbf{F}_2 dx_2 = \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{F}_2}{\partial x_1} - \frac{\partial \mathbf{F}_1}{\partial x_2} \right) dS_3 \quad (1.496)$$

1.9.5 Identidades de Green

Sea $\vec{\mathbf{F}}$ un vector, aplicando el teorema de la divergencia obtenemos que:

$$\int_V \nabla \cdot \vec{\mathbf{F}} dV = \int_S \vec{\mathbf{F}} \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.497)$$

Además, consideremos las identidades demostradas en (1.475) y (1.477), respectivamente:

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi) = \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) \quad (1.498)$$

$$\nabla \cdot (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) = \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi \quad (1.499)$$

Considerando que $\vec{\mathbf{F}} = \phi \nabla \psi$ y reemplazando (1.498) en (1.497) obtenemos que:

$$\int_V \phi \nabla^2 \psi + (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) dV = \int_S \phi \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.500)$$

$$\Rightarrow \int_V (\nabla \phi) \cdot (\nabla \psi) dV = \int_S \phi \nabla \psi \cdot \hat{\mathbf{n}} dS - \int_V \phi \nabla^2 \psi dV$$

que es conocida como la *primera identidad de Green*.

Si ahora reemplazamos (1.499) en (1.497) obtenemos que:

$$\int_V \phi \nabla^2 \psi - \psi \nabla^2 \phi dV = \int_S (\phi \nabla \psi - \psi \nabla \phi) \cdot \hat{\mathbf{n}} dS \quad (1.501)$$

que es conocida como la *segunda identidad de Green*.

Ejemplo 1.45: Si un vector se define como: $\vec{\mathbf{b}} = \nabla \wedge \vec{\mathbf{v}}$, probar que:

$$\int_S \lambda \mathbf{b}_i \hat{\mathbf{n}}_i dS = \int_V \lambda_{,i} \mathbf{b}_i dV$$

donde λ es una función únicamente de $\vec{\mathbf{x}}$, *i.e.*, $\lambda = \lambda(\vec{\mathbf{x}})$.

Solución: Si $\vec{\mathbf{b}} = \nabla \wedge \vec{\mathbf{v}}$, luego $\mathbf{b}_i = \epsilon_{ijk} \mathbf{v}_{k,j}$. Reemplazando en la integral de superficie anterior resulta:

$$\int_S \lambda \mathbf{b}_i \hat{\mathbf{n}}_i dS = \int_S \lambda \epsilon_{ijk} \mathbf{v}_{k,j} \hat{\mathbf{n}}_i dS$$

Aplicando el teorema de la divergencia de Gauss, resulta:

$$\begin{aligned}
\int_S \lambda \mathbf{b}_i \hat{\mathbf{n}}_i dS &= \int_S \lambda \epsilon_{ijk} \mathbf{v}_{k,j} \hat{\mathbf{n}}_i dS = \int_V (\epsilon_{ijk} \lambda \mathbf{v}_{k,j})_{,i} dV \\
&= \int_V (\epsilon_{ijk} \lambda_{,i} \mathbf{v}_{k,j} + \epsilon_{ijk} \lambda \mathbf{v}_{k,ji}) dV \\
&= \int_V (\lambda_{,i} \underbrace{\epsilon_{ijk} \mathbf{v}_{k,j}}_{\mathbf{b}_i} + \lambda \underbrace{\epsilon_{ijk} \mathbf{v}_{k,ji}}_0) dV = \int_V \lambda_{,i} \mathbf{b}_i dV \\
&\qquad\qquad\qquad c.q.d.
\end{aligned}$$

1.10 Coordenadas Cilíndricas y Esféricas

Para la solución de determinados problemas, puede resultar conveniente emplear otros sistemas de coordenadas, como por ejemplo el sistema de coordenadas cilíndricas o el sistema de coordenadas esféricas.

1.10.1 Sistema de Coordenadas Cilíndricas

En el sistema de coordenadas cilíndricas (r, θ, z) , se adopta como eje de simetría la dirección z . En este sistema un punto P tiene coordenadas (r, θ, z) , restringido a $0 \leq \theta \leq 180^\circ$, donde estas variables están indicadas en la Figura 1.38.

Conversión de coordenadas cilíndricas a las coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x_1 = r \cos \theta \\ x_2 = r \sin \theta \\ x_3 = z \end{cases} \quad (1.502)$$

Conversión de coordenadas cartesianas a las coordenadas cilíndricas

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{x_2}{x_1}\right) \\ z = x_3 \end{cases} \quad (1.503)$$

Los versores en este sistema, $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_z$ pueden obtenerse con una simple ley de transformación, donde la matriz de transformación viene dada por un giro alrededor del eje z de un ángulo θ , es decir:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \hat{\mathbf{e}}_z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad (1.504)$$

resultando

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta = -\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_z = \hat{\mathbf{e}}_3 \end{cases} \xrightarrow{\text{inversa}} \begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_1 = \hat{\mathbf{e}}_r \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \sin \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_2 = \hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z \end{cases} \quad (1.505)$$

Podemos verificar en la ecuación (1.505) que $\hat{\mathbf{e}}_r$ y $\hat{\mathbf{e}}_\theta$ son dependientes de θ , luego podemos obtener las siguientes diferenciaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} &= \hat{\mathbf{e}}_1 (-\sin \theta) + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} &= -\hat{\mathbf{e}}_1 (\cos \theta) + \hat{\mathbf{e}}_2 (-\sin \theta) = -\hat{\mathbf{e}}_r \end{aligned} \quad (1.506)$$

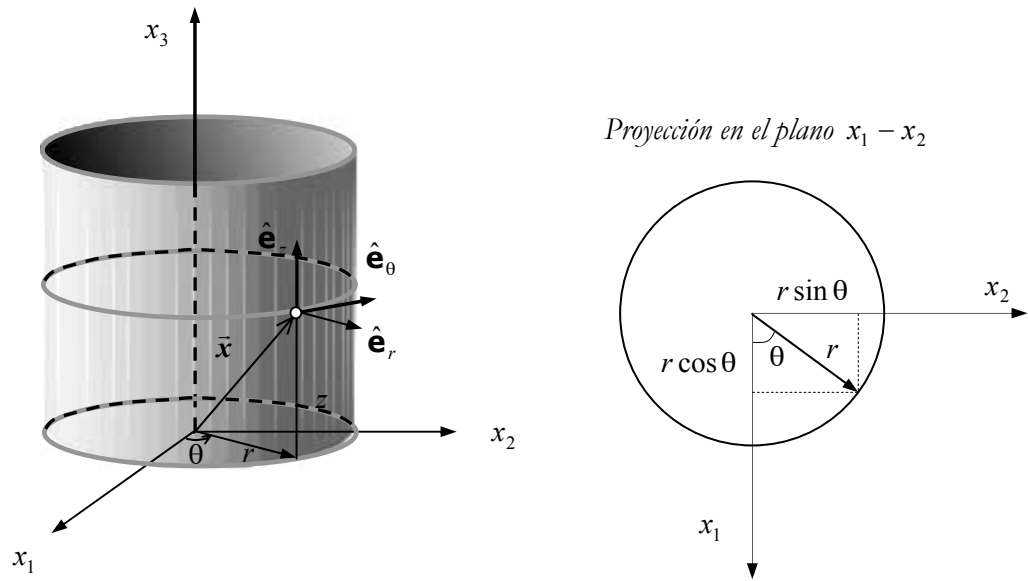


Figura 1.38: Sistema de coordenadas cilíndricas.

Utilizando la regla de la cadena para derivadas parciales podemos demostrar que el operador naba ∇ se expresa en coordenadas cilíndricas como:

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \quad (1.507)$$

El operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas cilíndricas queda:

$$\begin{aligned} \nabla^2 &= \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \end{aligned} \quad (1.508)$$

La demostración de (1.508) siguen a continuación.

$$\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla = \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \quad (1.509)$$

Haciendo el producto y considerando que $\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_3 = \hat{\mathbf{e}}_z \cdot \hat{\mathbf{e}}_r = 0$, obtenemos los siguientes términos:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r}}_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{\partial}{\partial r} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} \quad (1.510)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) &= \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta}}_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{\partial}{\partial r} + \\ &\frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}}_{\hat{\mathbf{e}}_r} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} = \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \end{aligned} \quad (1.511)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} \quad (1.512)$$

Sumando los términos obtenemos la expresión del Laplaciano dada por (1.508).

Consideremos un campo vectorial representado por $\vec{\mathbf{v}} = v_r \hat{\mathbf{e}}_r + v_\theta \hat{\mathbf{e}}_\theta + v_3 \hat{\mathbf{e}}_3$, a continuación aplicaremos a este vector los siguientes operadores:

Rotacional de un vector

El rotacional de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ viene dado por:

$$\nabla \wedge \vec{\mathbf{v}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r & \hat{\mathbf{e}}_\theta & \hat{\mathbf{e}}_3 \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ v_r & v_\theta & v_3 \end{vmatrix} \quad (1.513)$$

Desarrollando el determinante anterior hallamos:

$$\nabla \wedge \vec{\mathbf{v}} = \hat{\mathbf{e}}_r \left(\frac{1}{r} \frac{\partial v_3}{\partial \theta} - \frac{\partial v_\theta}{\partial x_3} \right) - \hat{\mathbf{e}}_\theta \left(\frac{\partial v_3}{\partial r} - \frac{\partial v_r}{\partial x_3} \right) + \hat{\mathbf{e}}_3 \left(\frac{\partial v_\theta}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} \right) \quad (1.514)$$

Divergencia

La divergencia de un vector $\vec{\mathbf{v}}$ en coordenadas cilíndricas viene dada por:

$$\nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} = \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_3 \frac{\partial}{\partial x_3} \right) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3) \quad (1.515)$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \nabla \cdot \vec{\mathbf{v}} &= \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3) + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3) \\ &+ \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3) \end{aligned} \quad (1.516)$$

Operando los tres términos de la ecuación anterior separadamente obtenemos:

$$\blacksquare \hat{\mathbf{e}}_r \cdot \frac{\partial}{\partial r} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3)$$

Sabiendo que $\hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_3, v_\theta, v_3$ no son dependientes de r :

$$\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta) = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_3 v_3) = 0$$

Nos queda por definir:

$$\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r v_r) = \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_r \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}_1 \frac{\partial v_r}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_r \cdot v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial r}}_0 = \frac{\partial v_r}{\partial r}$$

$$\blacksquare \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3)$$

Como $\hat{\mathbf{e}}_3 v_3$ no es dependiente de θ , resulta:

$$\hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{e}}_3 v_3) = 0$$

Resultando:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta) &= \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_r}_0 \frac{1}{r} \frac{\partial v_r}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot v_r \underbrace{\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta}}_{\hat{\mathbf{e}}_\theta} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_\theta \cdot v_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta}}_{=-\hat{\mathbf{e}}_r} \\ &= v_r \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \end{aligned}$$

$$\blacksquare \hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3)$$

$$\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \frac{\partial}{\partial x_3} (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_3 v_3) = \underbrace{\hat{\mathbf{e}}_3 \cdot \hat{\mathbf{e}}_3}_1 \frac{\partial v_3}{\partial x_3} = \frac{\partial v_3}{\partial x_3}$$

Teniendo en cuenta todas operaciones anteriores concluimos que:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + v_r \frac{1}{r} + \frac{1}{r} \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.517)$$

o bien:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{1}{r} \left(v_r + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} \right) + \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \quad (1.518)$$

1.10.2 Sistema de Coordenadas Esféricas

Las coordenadas esféricas (r, θ, ϕ) están indicadas en la Figura 1.39 luego, se cumple que:

Conversión de coordenadas esféricas a las coordenadas cartesianas:

$$\begin{cases} x_1 = r \sin \theta \cos \phi \\ x_2 = r \sin \theta \sin \phi \\ x_3 = r \cos \theta \end{cases} \quad (1.519)$$

donde $r \geq 0$ y $0 \leq \phi \leq 180^\circ$ y $0 \leq \theta \leq 360^\circ$.

Conversión de coordenadas cartesianas a las coordenadas esféricas:

$$\begin{cases} r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} \\ \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}}{x_3}\right) \\ \phi = \arctan\frac{x_2}{x_1} \end{cases} \quad (1.520)$$

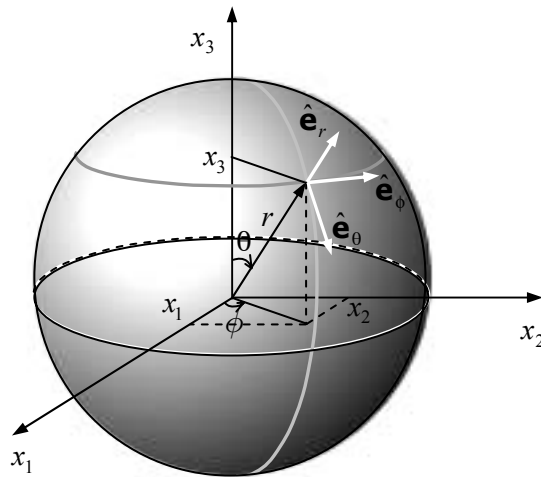


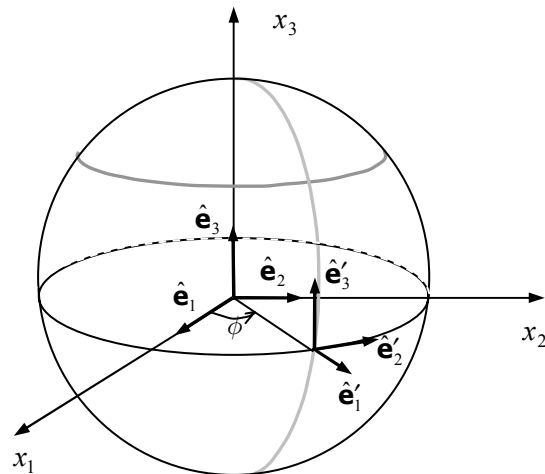
Figura 1.39: Sistema de coordenadas esféricas.

Los vectores unitarios $\hat{\mathbf{e}}_r, \hat{\mathbf{e}}_\theta, \hat{\mathbf{e}}_\phi$ (mutuamente ortogonales entre sí) están ilustrados en la Figura 1.39, y los podemos expresar en función de los versores $\hat{\mathbf{e}}_1, \hat{\mathbf{e}}_2, \hat{\mathbf{e}}_3$ a través de una transformación de coordenadas:

- Rotación según eje $\hat{\mathbf{e}}_3$ de un ángulo ϕ

Luego el nuevo sistema estará definido como:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}$$

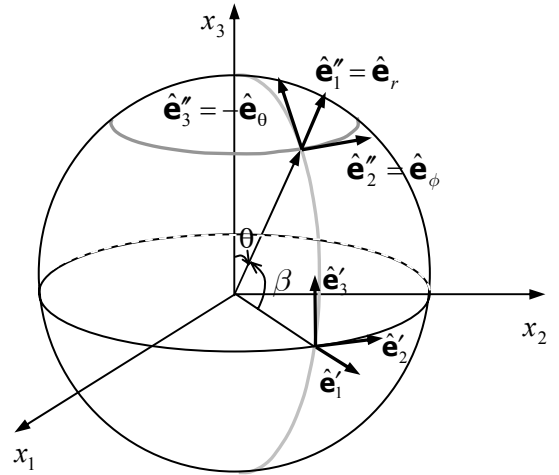


- Rotación según eje $\hat{\mathbf{e}}'_2$ de un ángulo β

Pero podemos observar en la figura que:

$$\beta = \frac{\pi}{2} - \theta \text{ luego } \cos \beta = \sin \theta \text{ y } \sin \beta = \cos \theta:$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}'_1 \\ \hat{\mathbf{e}}'_2 \\ \hat{\mathbf{e}}'_3 \end{bmatrix}$$



Considerando las dos transformaciones anteriores podemos obtener que:

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi \\ -\hat{\mathbf{e}}_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta & 0 & \cos \theta \\ 0 & 1 & 0 \\ -\cos \theta & 0 & \sin \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix} \quad (1.521)$$

$$\begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_r \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \theta \cos \phi & \sin \theta \sin \phi & \cos \theta \\ \cos \theta \cos \phi & \cos \theta \sin \phi & -\sin \theta \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \hat{\mathbf{e}}_1 \\ \hat{\mathbf{e}}_2 \\ \hat{\mathbf{e}}_3 \end{bmatrix}$$

Explícitamente:

$$\begin{cases} \hat{\mathbf{e}}_r = \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_3 \cos \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\theta = \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_3 \sin \theta \\ \hat{\mathbf{e}}_\phi = -\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi \end{cases} \quad (1.522)$$

La diferenciación de la base en función de θ , ϕ queda:

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \theta} = \hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi \cos \theta - \hat{\mathbf{e}}_3 \sin \theta = \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (1.523)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_r}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi \sin \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi \sin \theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \sin \theta \quad (1.524)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \theta} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi \sin \theta - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi \sin \theta - \hat{\mathbf{e}}_3 \cos \theta = -\hat{\mathbf{e}}_r \quad (1.525)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\theta}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \sin \phi \cos \theta + \hat{\mathbf{e}}_2 \cos \phi \cos \theta = \hat{\mathbf{e}}_\phi \cos \theta \quad (1.526)$$

$$\frac{\partial \hat{\mathbf{e}}_\phi}{\partial \phi} = -\hat{\mathbf{e}}_1 \cos \phi - \hat{\mathbf{e}}_2 \sin \phi = -\hat{\mathbf{e}}_r \sin \theta - \hat{\mathbf{e}}_\theta \cos \theta \quad (1.527)$$

El operador nabla será dado por:

$$\nabla = \hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \quad (1.528)$$

El operador Laplaciano ∇^2 en coordenadas esféricas queda:

$$\begin{aligned}\nabla^2 &= \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2} \\ &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} + \frac{\cotg \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \phi^2}\end{aligned}\quad (1.529)$$

Divergencia

La divergencia de un vector $\bar{\mathbf{v}}$ en coordenadas esféricas viene dada por:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \left(\hat{\mathbf{e}}_r \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\mathbf{e}}_\theta \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\mathbf{e}}_\phi \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} \right) \cdot (\hat{\mathbf{e}}_r v_r + \hat{\mathbf{e}}_\theta v_\theta + \hat{\mathbf{e}}_\phi v_\phi) \quad (1.530)$$

Haciendo el producto obtenemos:

$$\nabla \cdot \bar{\mathbf{v}} = \frac{\partial v_r}{\partial r} + \frac{\partial v_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial v_\phi}{\partial \phi} + \frac{2}{r} v_r + v_\phi \cotg \theta \quad (1.531)$$

Ejemplo 1.46: Escribir la ecuación ($z = x^2 - y^2$), dada en coordenadas cartesianas, en coordenadas cilíndricas y esféricas:

Solución:

$$\text{cilíndricas: } z = (r \cos \theta)^2 - (r \sin \theta)^2 \Rightarrow z = r^2 \cos(2\theta)$$

$$\text{esféricas: } r \cos \theta = (r \sin \theta \cos \phi)^2 - (r \sin \theta \sin \phi)^2$$

Apéndice

A

Representación Gráfica de un Tensor

A.1 Introducción

Existen diversas aplicaciones prácticas en Ingeniería que utiliza la representación gráfica de un tensor de segundo orden. La representación gráfica de un tensor de segundo orden consiste en una gráfica bidimensional donde la abscisa viene representada por la componente normal (T_N) y la ordenada por la componente tangencial (T_S) para todos los planos admisibles, $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$.

A.2 Proyección de un Tensor de Segundo Orden sobre una Dirección

A.2.1 Componente Normal y Tangencial

Como hemos visto en el capítulo 1, la proyección de un tensor de segundo (\mathbf{T}) orden sobre una dirección ($\hat{\mathbf{n}}$) resulta un vector $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

El vector tensor $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}$ asociado a la dirección $\hat{\mathbf{n}}$ puede descomponerse en una componente normal $\bar{\mathbf{T}}_N$ (vector normal) y en otra tangencial $\bar{\mathbf{T}}_S$ (vector tangencial) tal como se indica en la Figura A.1. La suma vectorial de estos vectores resulta:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \bar{\mathbf{T}}_N + \bar{\mathbf{T}}_S \quad (\text{A.1})$$

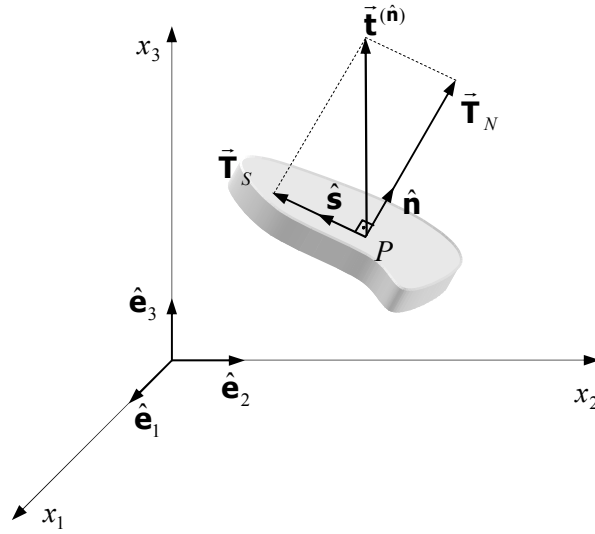


Figura A.1: Componentes normal y tangencial del vector tensor.

Siendo $\hat{\mathbf{n}}$ el versor normal al plano y $\hat{\mathbf{s}}$ el versor tangente al plano, podemos escribir la relación anterior como:

$$\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} = T_N \hat{\mathbf{n}} + T_S \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.2})$$

donde T_N y T_S son los módulos de $\bar{\mathbf{T}}_N$ y de $\bar{\mathbf{T}}_S$, respectivamente.

Escribiendo el vector $\bar{\mathbf{T}}_N$ en función de su módulo T_N y del versor $\hat{\mathbf{n}}$, las siguientes relaciones son válidas:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_N &= T_N \hat{\mathbf{n}} \equiv T_N \otimes \hat{\mathbf{n}} & \bar{T}_{Ni} &= T_N \hat{n}_i \\ &= (\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}}) \hat{\mathbf{n}} = (\hat{\mathbf{n}} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}) \hat{\mathbf{n}} & &= (\mathbf{t}_k^{(\hat{\mathbf{n}})} \hat{n}_k) \hat{n}_i = (\hat{n}_k \mathbf{t}_k^{(\hat{\mathbf{n}})}) \hat{n}_i \\ &= \underbrace{[\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}]}_{T_N} \hat{\mathbf{n}} & &= \underbrace{[\hat{n}_k T_{kj} \hat{n}_j]}_{T_N} \hat{n}_i \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

Verificamos que T_N puede ser obtenido a través de las siguientes relaciones:

$$T_N = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{n}_k T_{kj} \hat{n}_j \quad (\text{A.4})$$

Observemos que \mathbf{T} será un tensor definido positivo si $T_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ para todo $\hat{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Podemos concluir también que $T_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}^{sym} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ luego, si la parte simétrica del tensor es un tensor definido positivo el tensor también lo será.

En notación indicial el módulo de $\bar{\mathbf{T}}_N$ viene dado por:

$$\begin{aligned} T_N &= \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mathbf{t}_k \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{n}_i \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= T_{kj} \hat{n}_j \hat{\mathbf{e}}_k \cdot \hat{n}_i \hat{\mathbf{e}}_i \\ &= T_{kj} \hat{n}_i \hat{n}_j \delta_{ki} \\ &= T_{ij} \hat{n}_i \hat{n}_j \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

Análogamente, podemos obtener el vector $\bar{\mathbf{T}}_S$ en función de su módulo T_S y del versor $\hat{\mathbf{s}}$:

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_S &= T_S \hat{\mathbf{s}} \\ &= (\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{s}}) \hat{\mathbf{s}} = (\hat{\mathbf{s}} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}) \hat{\mathbf{s}} \\ &= \underbrace{[\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}]}_{T_S} \hat{\mathbf{s}} \end{aligned} \quad \left| \quad \begin{aligned} \bar{T}_{Si} &= T_S \hat{s}_i \\ &= (\mathbf{t}_j^{(\hat{\mathbf{n}})} \hat{s}_j) \hat{s}_i \\ &= \underbrace{[T_{jk} \hat{n}_k \hat{s}_j]}_{T_S} \hat{s}_i \end{aligned} \quad (\text{A.6})$$

Otra forma de obtener el vector tangencial puede ser a través de la ecuación (A.1):

$$\begin{aligned} \bar{\mathbf{T}}_S &= \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} - \bar{\mathbf{T}}_N \\ &= \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} - [\mathbf{T} : (\hat{\mathbf{n}} \otimes \hat{\mathbf{n}})] \hat{\mathbf{n}} \end{aligned} \quad (\text{A.7})$$

Ya que $\bar{\mathbf{T}}_S$ y $\bar{\mathbf{T}}_N$ son perpendiculares, podemos obtener el módulo de $\bar{\mathbf{T}}_S$ a través del teorema de Pitágoras:

$$T_S^2 = \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} - T_N^2 \quad (\text{A.8})$$

con $\mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} = T_{ij} T_{ik} \hat{n}_j \hat{n}_k$.

A.2.1.1 Máxima y Mínima Componente Normal

Como visto anteriormente la componente normal viene dada por $T_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ con la restricción que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$ (versor). Los valores de máximos y mínimos de T_N con restricción pueden ser obtenidos a través del método del multiplicador de Lagrange. Este método consiste en construir una función tal que:

$$\mathcal{L}(\hat{\mathbf{n}}, \mu) = T_N - \mu(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - 1) = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} - \mu(\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - 1) \quad (\text{A.9})$$

donde μ es el multiplicador de Lagrange. Diferenciando la función $\mathcal{L}(\hat{\mathbf{n}})$ con respecto a $\hat{\mathbf{n}}$ y a μ obtenemos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mathbf{n}}, \mu)}{\partial \hat{\mathbf{n}}} &= 2\mathbf{T}^{sym} \cdot \hat{\mathbf{n}} - 2\mu \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}} \quad \Rightarrow \quad (\mathbf{T}^{sym} - \mu \mathbf{1}) \cdot \hat{\mathbf{n}} = \bar{\mathbf{0}} \\ \frac{\partial \mathcal{L}(\hat{\mathbf{n}}, \mu)}{\partial \mu} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} - 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1 \end{aligned} \quad (\text{A.10})$$

El primer sistemas de ecuaciones sólo tiene solución si y solo si $\det(\mathbf{T}^{sym} - \mu \mathbf{1}) = 0$ que es el problema de autovalor de la parte simétrica de \mathbf{T} . Es decir, los valores de máximos y mínimos de T_N corresponden a los autovalores de \mathbf{T}^{sym} . Siendo T_I^{sym} , T_{II}^{sym} , T_{III}^{sym} , los autovalores de \mathbf{T}^{sym} y reestructurando los autovalores de tal forma que:

$$T_I^{sym} > T_{II}^{sym} > T_{III}^{sym} \quad (\text{A.11})$$

Podemos entonces decir que el valor máximo de T_N es T_I^{sym} , y T_{III}^{sym} es el valor mínimo.

NOTA: Ya era de esperar que los valores extremos de T_N estuviera relacionado con el tensor simétrico \mathbf{T}^{sym} ya que para T_N la parte antisimétrica no juega ningún papel $T_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T}^{sym} \cdot \hat{\mathbf{n}}$.

OBS.: Cuando utilizamos la nomenclatura T_I, T_{II}, T_{III} ya está implícito que $T_I > T_{II} > T_{III}$.

A.2.1.2 Máxima y Mínima Componente Tangencial de un Tensor Simétrico

Por simplicidad vamos trabajar en el espacio principal del tensor \mathbf{T} y vamos considerar que el tensor es simétrico, $\mathbf{T} = \mathbf{T}^T$. En el espacio principal, las componentes del tensor \mathbf{T} vienen representadas por las componentes normales (Figura A.2), ya que en este espacio carece de componentes tangenciales. Observemos también que en este espacio las componentes normales T_i tienen las mismas direcciones que $\mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{n}})$. El módulo de la componente normal T_N en un plano arbitrario de normal $\hat{\mathbf{n}}$, según la ecuación (A.5), viene dado por la expresión:

$$\begin{aligned} T_N &= \mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{n}}) \mathbf{n}_i = T_{ij} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_i \\ &= T_1 \mathbf{n}_1^2 + T_2 \mathbf{n}_2^2 + T_3 \mathbf{n}_3^2 \end{aligned} \quad (\text{A.12})$$

Observemos que para el plano particular $\mathbf{n}_i = [1, 0, 0]^T \Rightarrow T_N = T_1$. Geométricamente (teorema de Pitágoras), podemos obtener el módulo de la componente tangencial:

$$\begin{aligned} T_S^2 &= \|\bar{\mathbf{t}}(\hat{\mathbf{n}})\|^2 - T_N^2 = \mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{n}}) \mathbf{t}_i(\hat{\mathbf{n}}) - T_N^2 \\ &= T_{ij} T_{ik} \hat{\mathbf{n}}_j \hat{\mathbf{n}}_k - T_N^2 \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

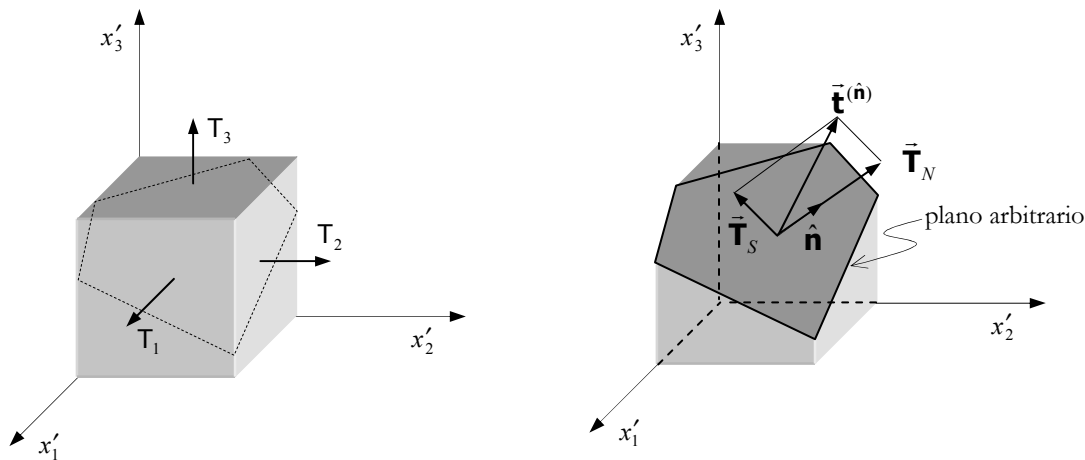


Figura A.2: Componentes del tensor en el espacio principal.

Reemplazando la ecuación (A.12) en la ecuación (A.13) hallamos:

$$T_S^2 = T_1^2 n_1^2 + T_2^2 n_2^2 + T_3^2 n_3^2 - (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2)^2 \tag{A.14}$$

Podemos formular la siguiente pregunta: ¿Cuáles son los valores de n_i que hacen máximo la función T_S^2 ? Este problema se reduce a encontrar valores extremos de la función:

$$F(\hat{\mathbf{n}}) = T_S^2 - \mu(n_i n_i - 1) \tag{A.15}$$

donde μ es el multiplicador de Lagrange, con la restricción $n_i n_i = 1$.

La condición necesaria es:

$$\frac{\partial F(\hat{\mathbf{n}})}{\partial n_i} = 0 \quad ; \quad \frac{\partial F(\hat{\mathbf{n}})}{\partial \mu} = 0 \tag{A.16}$$

resultando:

$$\begin{aligned} n_1 \{ T_1^2 - 2T_1 (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) + \mu \} &= 0 \\ n_2 \{ T_2^2 - 2T_2 (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) + \mu \} &= 0 \\ n_3 \{ T_3^2 - 2T_3 (T_1 n_1^2 + T_2 n_2^2 + T_3 n_3^2) + \mu \} &= 0 \end{aligned} \tag{A.17}$$

con la condición $n_i n_i = 1$. Podemos obtener analíticamente la solución del sistema anterior resultando en las siguientes soluciones posibles:

solución	\hat{n}_1	\hat{n}_2	\hat{n}_3	T_S	
(1)	$n_1^{(1)} = \pm 1$	$n_2^{(1)} = 0$	$n_3^{(1)} = 0$	$T_S = 0$	
(2)	$n_1^{(2)} = 0$	$n_2^{(2)} = \pm 1$	$n_3^{(2)} = 0$	$T_S = 0$	
(3)	$n_1^{(3)} = 0$	$n_1^{(3)} = 0$	$n_1^{(3)} = \pm 1$	$T_S = 0$	
(4)	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$T_S = \pm \frac{T_2 - T_3}{2}$	(A.18)
(5)	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$T_S = \pm \frac{T_1 - T_3}{2}$	
(6)	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	$\pm \frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$T_S = \pm \frac{T_1 - T_2}{2}$	

Los valores de T_S fueron obtenidos introduciendo los valores de n_i en la expresión (A.14).

Los tres primeros conjuntos de soluciones nos proporcionan los valores mínimos de T_S , que corresponden justamente con las direcciones principales.

Para las soluciones (4) los planos de máximo relativo para T_S están esquematizados en la Figura A.3.

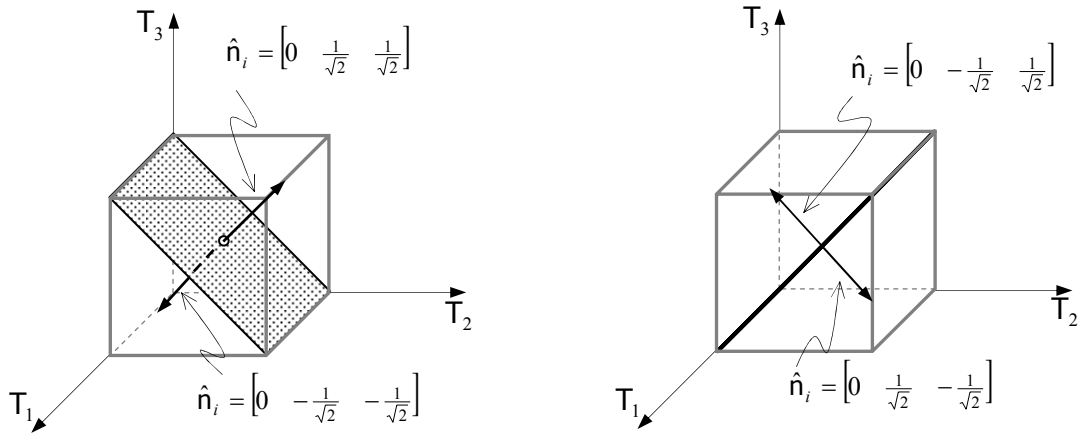


Figura A.3: Planos de máxima componente tangencial (relativa) con $n_1 = 0$.

Para las soluciones (5), los planos están esquematizados en la Figura A.4.

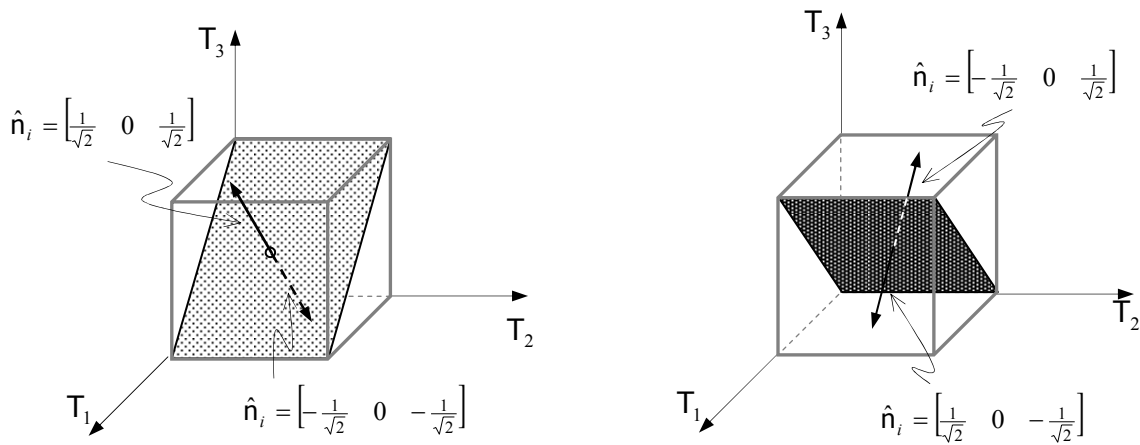


Figura A.4: Planos de máxima componente tangencial (relativa) con $n_2 = 0$.

En la Figura A.5 podemos visualizar los planos de máxima componente tangencial para las soluciones (6).

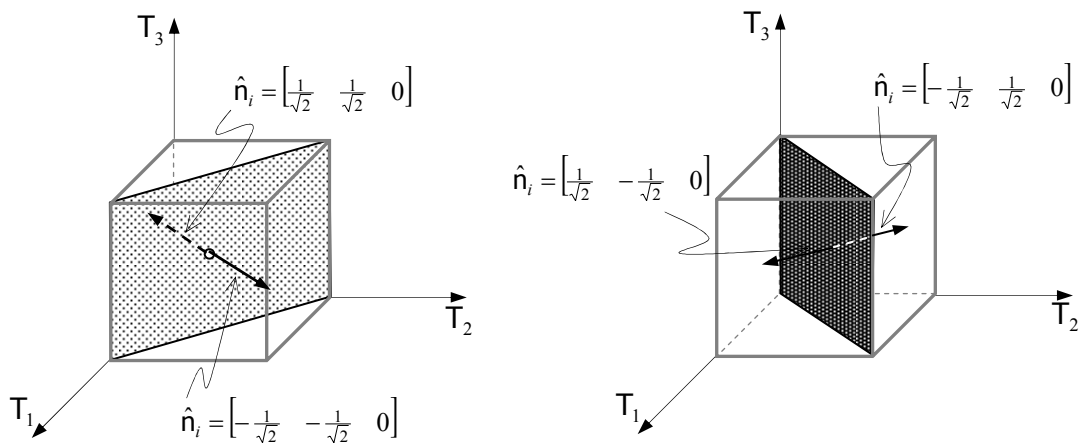


Figura A.5: Planos de máxima componente tangencial (relativa) con $n_3 = 0$.

Ordenando los autovalores (valores principales) (T_I, T_{II}, T_{III}) de la forma:

$$T_I > T_{II} > T_{III} \quad (\text{A.19})$$

obtenemos el máximo absoluto de la tensión de corte:

$$T_{S \max} = \frac{\|T_I - T_{III}\|}{2} \quad (\text{A.20})$$

A.2.1.3 Representación Gráfica de un Tensor de Segundo Orden Arbitrario

Conocidas las componentes de un tensor de segundo orden en la base cartesiana T_{ij} podemos obtener las componentes normales y tangenciales (T_N, T_S) para cualquier plano de normal $\hat{\mathbf{n}}$, con la restricción que $\hat{\mathbf{n}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 1$, en componentes $\hat{n}_1^2 + \hat{n}_2^2 + \hat{n}_3^2 = 1$. Podemos dibujar una gráfica donde la abscisa viene representada por la componente normal (T_N) y la ordenada por la componente tangencial (T_S) al plano.

De forma aleatoria sacamos distintos valores para la normal (versor) y obtenemos los valores correspondientes de (T_N, T_S) y plotamos sus coordenadas en una gráfica $T_N \times T_S$. De esta forma vamos a obtener la representación gráfica de tensor de segundo orden, es decir, los valores posibles (factibles) para la componente normal y tangencial del tensor en cada plano. De igual manera también dibujamos la gráfica correspondiente a la parte simétrica del tensor, $T_N^{sym} \times T_S^{sym}$.

A continuación adoptamos algunos valores para las componentes del tensor y verifiquemos que formato tiene la gráfica componente normal versus componente tangencial.

El primer ejemplo, ver Figura A.6, constituye de un tensor no simétrico. Es interesante observar que el tensor es definido positivo ya que $T_N = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}} > 0$ para todo $\hat{\mathbf{n}} \neq \vec{\mathbf{0}}$. Verifiquemos también que el tensor tiene tres autovalores reales, y por definición de autovalor, corresponden cuando $T_S = 0$. Los valores máximos y mínimos para la componente T_N son coincidentes con los autovalores de la parte simétrica de \mathbf{T} .

Para la componente tangencial podemos hacer la siguiente descomposición:

$$\vec{T}_S = \underbrace{[\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}]}_{T_S} \hat{\mathbf{s}} = [\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{sym} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{anti} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.21})$$

Cuando $\hat{\mathbf{n}}$ sea una de las direcciones principales de la parte simétrica, tenemos que:

$$\vec{T}_S = [\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{sym} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{anti} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \hat{\mathbf{s}} = [\hat{\mathbf{s}} \cdot \lambda \hat{\mathbf{n}} + \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{anti} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \hat{\mathbf{s}} = [\hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{anti} \cdot \hat{\mathbf{n}}] \hat{\mathbf{s}} \quad (\text{A.22})$$

ya que los versores $\hat{\mathbf{s}}, \hat{\mathbf{n}}$ son ortogonales, $\hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0$. Esto implica que en los planos $\hat{\mathbf{n}}^{(1)}, \hat{\mathbf{n}}^{(2)}, \hat{\mathbf{n}}^{(3)}$, (autovectores de \mathbf{T}^{sym}), las correspondientes componentes normales y tangenciales asociadas al tensor \mathbf{T} vendrán dadas por el autovalor de \mathbf{T}^{sym} , y componente tangencial dada por:

$$T_S = \hat{\mathbf{s}} \cdot \mathbf{T}^{anti} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{s}} \cdot \vec{\mathbf{t}}_{anti}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \pm \|\vec{\mathbf{t}}_{anti}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| \hat{\mathbf{s}} \cdot \hat{\mathbf{s}} = \pm \|\vec{\mathbf{t}}_{anti}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| \quad (\text{A.23})$$

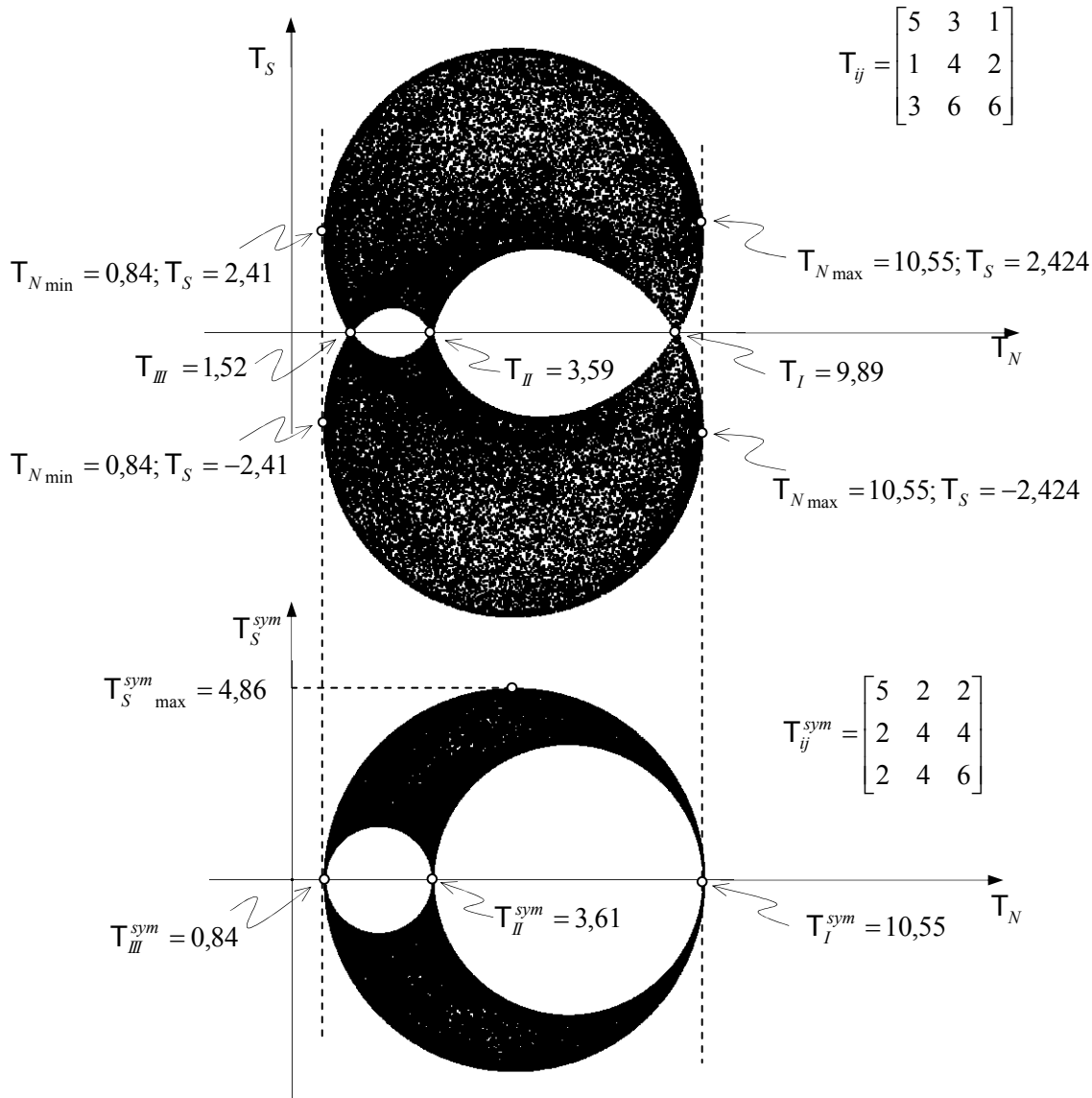


Figura A.6: Representación gráfica de un tensor definido positivo no simétrico.

Por ejemplo, para el autovalor $T_I^{sym} = 10,55$ que está asociado al autovector $\hat{n}_j^{(1)} = [-0,45229371; -0,561517458; -0,692913086]$, tenemos que:

$$T_S = \pm \left\| \vec{\mathbf{t}}_{anti}(\hat{\mathbf{n}}) \right\| = \pm \left\| \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}}_{\mathbf{T}_{ij}^{anti}} \underbrace{\begin{bmatrix} -0,45229371 \\ -0,561517458 \\ -0,692913086 \end{bmatrix}}_{\hat{\mathbf{n}}_j^{(1)}} \right\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} 0,1313956 \\ 1,8381199 \\ -1,5753286 \end{bmatrix} \right\| = \pm 2,424378 \quad (\text{A.24})$$

Para el autovalor $T_{II}^{sym} = 3,61$ tenemos que:

$$T_S = \pm \|\tilde{\mathbf{t}}_{anti}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,88542667 \\ 0,18949182 \\ 0,42439659 \end{bmatrix} \right\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} -0,234905 \\ 0,036633496 \\ -0,50644304 \end{bmatrix} \right\| = \pm 0,55947 \quad (\text{A.25})$$

Para el autovalor $T_{III}^{sym} = 0,84$ tenemos que:

$$T_S = \pm \|\tilde{\mathbf{t}}_{anti}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,107004733 \\ -0,80547563 \\ 0,582888489 \end{bmatrix} \right\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} -1,3883641 \\ -1,2727817 \\ -1,5039465 \end{bmatrix} \right\| = \pm 2,41 \quad (\text{A.26})$$

Debemos enfatizar que este procedimiento sólo es válido para los planos correspondientes a los autovectores de la parte simétrica de \mathbf{T} , para un plano arbitrario ya no es válido.

Con lo que respecta a la parte simétrica del tensor, verifiquemos que el valor máximo y mínimo de la componente normal se encuentra en los valores principales, $T_{N_{max}} = T_I^{sym} = 10,55$ y $T_{N_{min}} = T_{III}^{sym} = 0,84$. La máxima componente tangencial es igual al radio del círculo que forma $T_I^{sym} = 10,55$ y $T_{III}^{sym} = 0,84$, ver Figura A.6, resultando

$$T_{S_{max}}^{sym} = \frac{10,55 - 0,84}{2} = 4,86.$$

El segundo ejemplo se trata de un tensor simétrico, ver Figura A.7. Además podemos verificar que el tensor no es definido positivo. Intuitivamente nos indica que para un tensor simétrico la gráfica componente normal versus componente tangencial es la intersección de tres circunferencias. Podemos verificar también en esta gráfica que la componente tangencial máxima viene dada por $T_{S_{max}} = \frac{\|T_I - T_{III}\|}{2} = \frac{8,328 - (-0,78)}{2} = 4,55$.

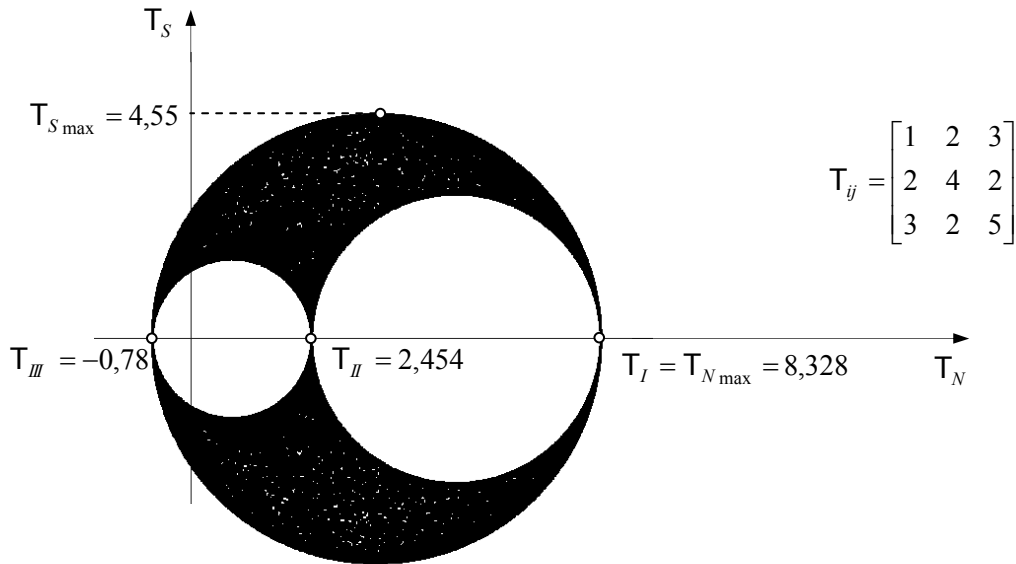


Figura A.7: Representación gráfica de un tensor simétrico.

El tercer ejemplo trata de un tensor simétrico que tiene dos autovalores iguales. Podemos verificar que los valores posibles para (T_N, T_S) está limitado a la circunferencia de radio

$R = \frac{T_I - T_{III}}{2} = 2,5$ y centrada en el punto $(T_N = \frac{T_I + T_{III}}{2} = 1,5, T_S = 0)$, ver Figura A.8.

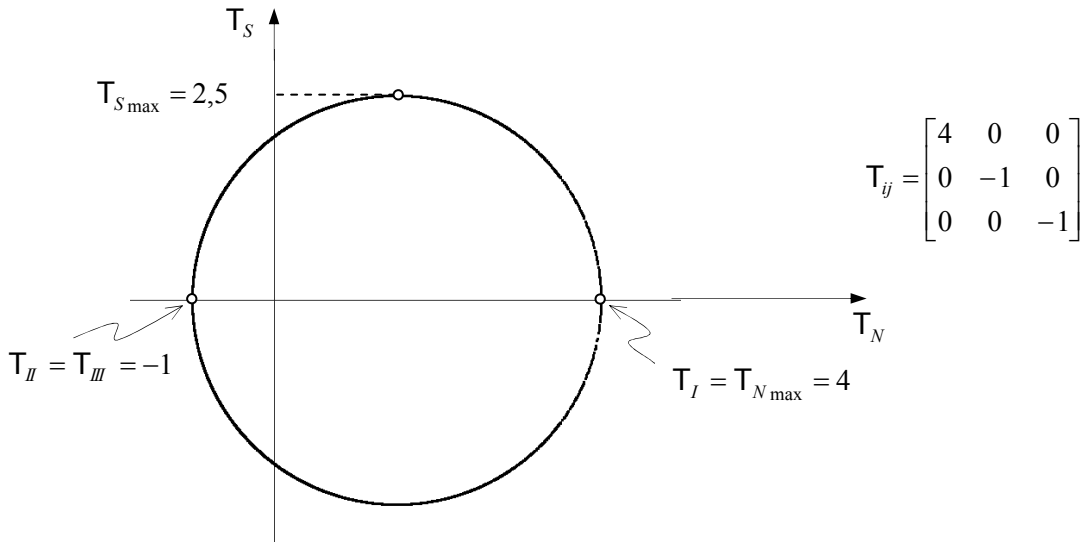


Figura A.8: Representación gráfica de un tensor simétrico con dos autovalores iguales.

El cuarto ejemplo se trata de un tensor no simétrico que tiene un único autovalor real e igual a $T_I = -0,964$, y dos imaginarios, ver Figura A.9, y además se trata de un tensor no definido positivo.

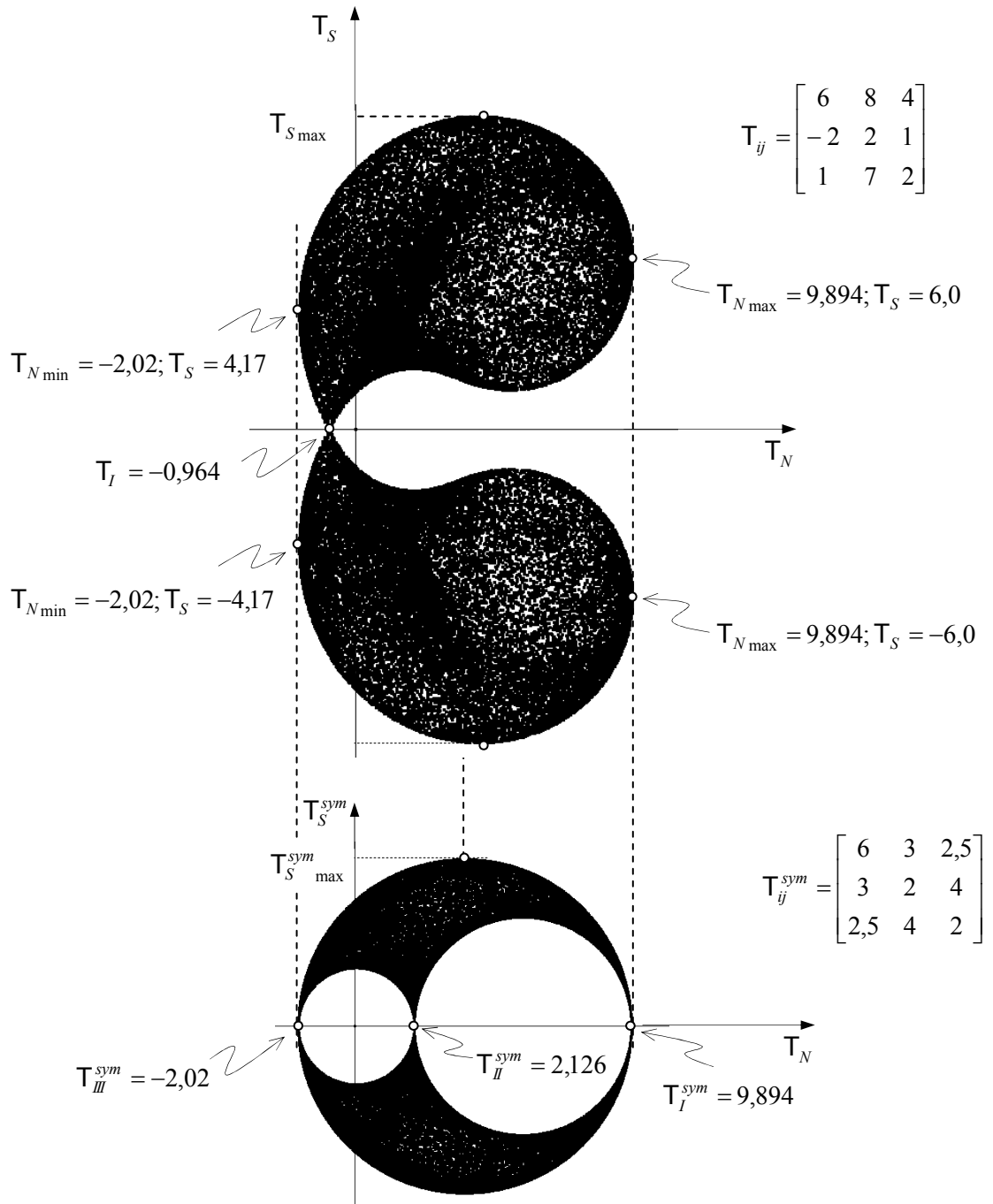


Figura A.9: Representación gráfica de un tensor no simétrico con un único autovalor real.

En los planos correspondientes a las direcciones principales de la parte simétrica del tensor tenemos los siguientes valores para la componente tangencial del tensor:

Para el autovalor $T_I^{sym} = 9,894$ tenemos que:

$$T_S = \pm \|\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1,5 \\ -5 & 0 & -3 \\ -1,5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -0,707427855 \\ -0,514420622 \\ -0,484682632 \end{bmatrix} \right\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} -3,299127 \\ 4,991187 \\ -0,482120 \end{bmatrix} \right\| = \pm 6,0 \quad (\text{A.27})$$

Para el autovalor $T_{III}^{sym} = -2,02$ tenemos que:

$$T_S = \pm \|\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} 0 & 5 & 1,5 \\ -5 & 0 & -3 \\ -1,5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0,0575152387 \\ -0,72538138475 \\ 0,685940116897 \end{bmatrix} \right\| = \pm \left\| \begin{bmatrix} -2,5979967 \\ -2,3453965 \\ -2,2624170 \end{bmatrix} \right\| = \pm 4,1676 \quad (\text{A.28})$$

A.2.1.4 Representación Gráfica de un Tensor de Segundo Orden Simétrico. Círculo de Mohr.

En este apartado vamos fijar nuestra atención en la representación gráfica de un tensor de segundo orden simétrico. La representación gráfica de un tensor de segundo orden simétrico denominamos de Círculo de Mohr, y tiene varias aplicaciones prácticas dentro del ámbito de ingeniería.

Por conveniencia, trabajaremos en el espacio principal (direcciones principales) y supongamos que las componentes normales (autovalores) están ordenadas: $T_I > T_{II} > T_{III}$. Partiremos de la expresión obtenida en (A.8), *i.e.*:

$$T_S^2 + T_N^2 = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \|\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}\|^2 \quad (\text{A.29})$$

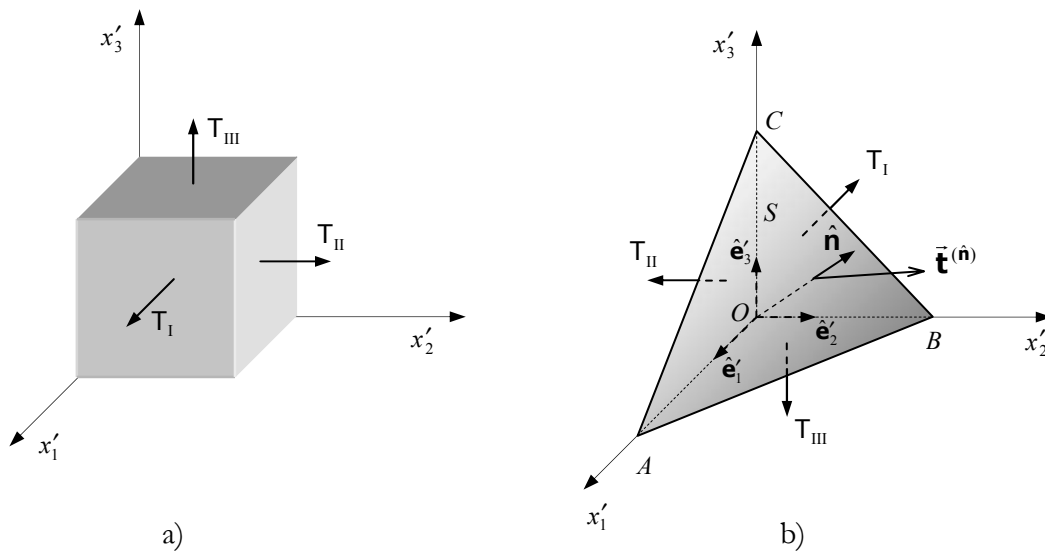


Figura A.10: Representación de las componentes (tensor simétrico) en el espacio principal.

Las componentes del vector proyección $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}$, para un plano arbitrario, fueron obtenidas en la ecuación (A.1). Fijemos ahora que $\hat{\mathbf{n}}$ es el versor del plano respecto a los ejes principales. Las componentes de $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} = \mathbf{T} \cdot \hat{\mathbf{n}}$, en el espacio principal, (Figura A.10b), son:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{t}_1^{(\hat{\mathbf{n}})} &= \mathbf{T}_I \mathbf{n}_1 \\
 \mathbf{t}_2^{(\hat{\mathbf{n}})} &= \mathbf{T}_{II} \mathbf{n}_2 \\
 \mathbf{t}_3^{(\hat{\mathbf{n}})} &= \mathbf{T}_{III} \mathbf{n}_3
 \end{aligned} \tag{A.30}$$

El producto escalar $\bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})}$ en este espacio será:

$$\begin{aligned}
 \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} &= \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \hat{\mathbf{e}}'_i \cdot \mathbf{t}_j^{(\hat{\mathbf{n}})} \hat{\mathbf{e}}'_j = \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_j^{(\hat{\mathbf{n}})} \delta_{ij} = \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_i^{(\hat{\mathbf{n}})} \\
 &= \mathbf{t}_1^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_1^{(\hat{\mathbf{n}})} + \mathbf{t}_2^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_2^{(\hat{\mathbf{n}})} + \mathbf{t}_3^{(\hat{\mathbf{n}})} \mathbf{t}_3^{(\hat{\mathbf{n}})} \\
 &= \mathbf{T}_I^2 \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{T}_{II}^2 \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III}^2 \mathbf{n}_3^2
 \end{aligned} \tag{A.31}$$

Combinando las expresiones (A.29) y (A.31), obtenemos que:

$$\mathbf{T}_S^2 + \mathbf{T}_N^2 = \mathbf{T}_I^2 \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{T}_{II}^2 \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III}^2 \mathbf{n}_3^2 \tag{A.32}$$

La componente normal \mathbf{T}_N , en el espacio principal, viene expresada de la forma:

$$\mathbf{T}_N = \bar{\mathbf{t}}^{(\hat{\mathbf{n}})} \cdot \hat{\mathbf{n}} = \mathbf{T}_{ij} \mathbf{n}_j \mathbf{n}_i = \mathbf{T}_I \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{T}_{II} \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III} \mathbf{n}_3^2 \tag{A.33}$$

donde utilizamos la expresión (A.5).

Considerando la restricción: $\mathbf{n}_i \mathbf{n}_i = 1$, $\mathbf{n}_1^2 = 1 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2$, y reemplazándola en la relación anterior (A.33) hallamos el valor de \mathbf{n}_2^2 :

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_N &= \mathbf{T}_I (1 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2) + \mathbf{T}_{II} \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III} \mathbf{n}_3^2 \\
 \Rightarrow \mathbf{n}_2^2 &= \frac{\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{III} \mathbf{n}_3^2 + \mathbf{T}_I \mathbf{n}_3^2 - \mathbf{T}_I}{(\mathbf{T}_{II} - \mathbf{T}_I)}
 \end{aligned} \tag{A.34}$$

Reemplazando también ($\mathbf{n}_1^2 = 1 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2$) en la ecuación (A.32) obtenemos:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{T}_S^2 + \mathbf{T}_N^2 &= \mathbf{T}_I^2 \mathbf{n}_1^2 + \mathbf{T}_{II}^2 \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III}^2 \mathbf{n}_3^2 \\
 &= \mathbf{T}_I^2 (1 - \mathbf{n}_2^2 - \mathbf{n}_3^2) + \mathbf{T}_{II}^2 \mathbf{n}_2^2 + \mathbf{T}_{III}^2 \mathbf{n}_3^2
 \end{aligned} \tag{A.35}$$

Sustituyendo \mathbf{n}_2^2 obtenido en (A.34) en la ecuación anterior resulta:

$$\mathbf{T}_S^2 + \mathbf{T}_N^2 = [(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_I)(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_{II})] \mathbf{n}_3^2 + \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_N + \mathbf{T}_I \mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{II} \mathbf{T}_{III} \tag{A.36}$$

Despejando \mathbf{n}_3^2 ;

$$\mathbf{n}_3^2 = \frac{(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_I)(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{II}) + \mathbf{T}_S^2}{(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_I)(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_{II})} \tag{A.37}$$

Análogamente, podemos obtener \mathbf{n}_1^2 y \mathbf{n}_2^2 , resultando:

$$\mathbf{n}_1^2 = \frac{(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{II})(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{III}) + \mathbf{T}_S^2}{(\mathbf{T}_I - \mathbf{T}_{II})(\mathbf{T}_I - \mathbf{T}_{III})} \geq 0 \tag{a}$$

$$\mathbf{n}_2^2 = \frac{(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{III})(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_I) + \mathbf{T}_S^2}{(\mathbf{T}_{II} - \mathbf{T}_{III})(\mathbf{T}_{II} - \mathbf{T}_I)} \geq 0 \tag{b} \tag{A.38}$$




$$\mathbf{n}_3^2 = \frac{(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_I)(\mathbf{T}_N - \mathbf{T}_{II}) + \mathbf{T}_S^2}{(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_I)(\mathbf{T}_{III} - \mathbf{T}_{II})} \geq 0 \tag{c}$$

Considerando que $T_I > T_{II} > T_{III}$ podemos verificar que las ecuaciones (A.38) (a) y (c) tienen denominadores positivos, como consecuencia sus numeradores deberán ser positivos, pues el miembro de la izquierda es positivo ($n_i^2 \geq 0$). Sin embargo, la ecuación (A.38) (b) tiene denominador negativo, por lo que su numerador tendrá que ser negativo, es decir:

$$\left. \begin{aligned} n_1^2 &= \frac{[(T_N - T_{II})(T_N - T_{III}) + T_S^2] \geq 0}{[(T_I - T_{II})(T_I - T_{III})] > 0} \geq 0 \\ n_2^2 &= \frac{[(T_N - T_{III})(T_N - T_I) + T_S^2] \leq 0}{[(T_{II} - T_{III})(T_{II} - T_I)] < 0} \geq 0 \\ n_3^2 &= \frac{[(T_N - T_I)(T_N - T_{II}) + T_S^2] \geq 0}{[(T_{III} - T_I)(T_{III} - T_{II})] > 0} \geq 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{cases} (T_N - T_{II})(T_N - T_{III}) + T_S^2 \geq 0 \\ (T_N - T_{III})(T_N - T_I) + T_S^2 \leq 0 \\ (T_N - T_I)(T_N - T_{II}) + T_S^2 \geq 0 \end{cases} \quad (\text{A.39})$$

Expandiendo las desigualdades anteriores (A.39) y factorizando, resultan:

$$\begin{aligned} T_S^2 + [T_N - \frac{1}{2}(T_{II} + T_{III})]^2 &\geq [\frac{1}{2}(T_{II} - T_{III})]^2 \\ T_S^2 + [T_N - \frac{1}{2}(T_I + T_{III})]^2 &\leq [\frac{1}{2}(T_I - T_{III})]^2 \\ T_S^2 + [T_N - \frac{1}{2}(T_I + T_{II})]^2 &\geq [\frac{1}{2}(T_I - T_{II})]^2 \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Las ecuaciones anteriores son ecuaciones de círculos. El primer círculo, de centro $\frac{1}{2}(T_{II} + T_{III})$ y radio $\frac{1}{2}(T_{II} - T_{III})$, nos indica que los puntos factibles para el par $(T_N; T_S)$ estarán en el exterior del círculo C_1 , incluyendo la circunferencia, ver Figura A.11. El segundo círculo, de centro $\frac{1}{2}(T_I + T_{III})$ y radio $\frac{1}{2}(T_I - T_{III})$, nos indica que los puntos factibles estarán en el interior de la circunferencia C_2 , incluyendo la circunferencia. La tercera ecuación nos indica que los puntos factibles serán exteriores a la circunferencia C_3 , cuya circunferencia tiene radio $\frac{1}{2}(T_I - T_{II})$ y centro $\frac{1}{2}(T_I + T_{II})$. Teniendo en cuenta las tres ecuaciones, la zona factible será la zona señalada en gris de la Figura A.11, incluyendo las circunferencias C_1, C_2, C_3 .

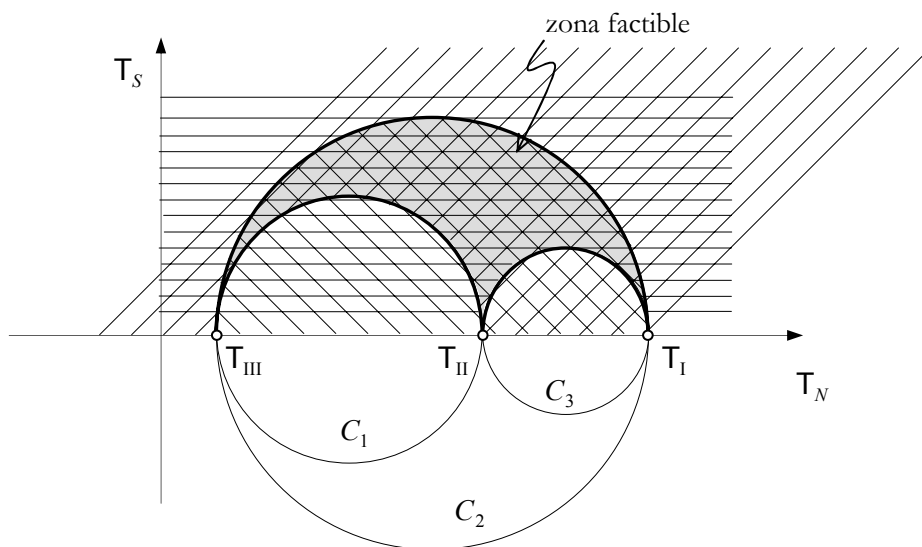


Figura A.11: Círculo de Mohr – zona factible.

En el círculo de Mohr podemos identificar los valores máximos de $T_{S\max}$ obtenidos en el subapartado anterior, de forma mas sencilla, ver Figura A.12.

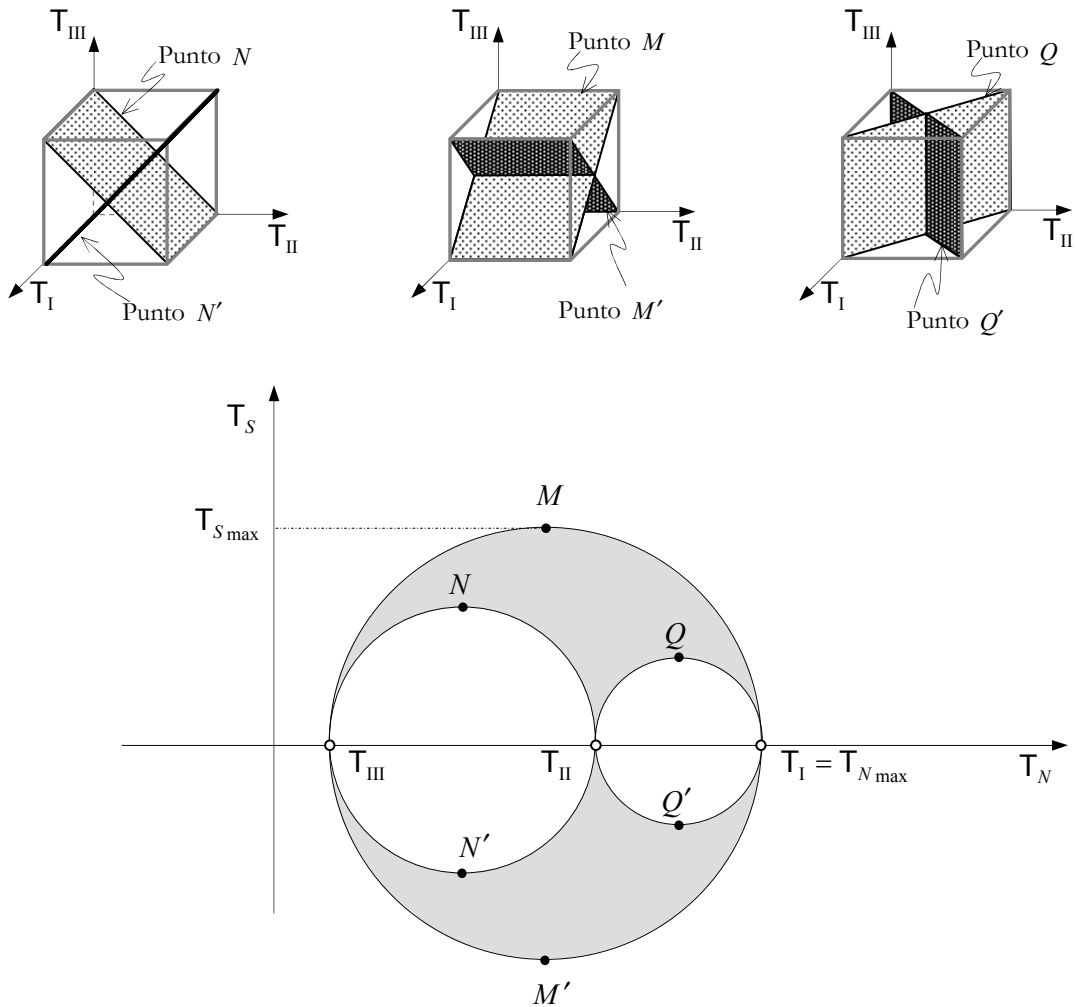


Figura A.12: Círculo de Mohr.

