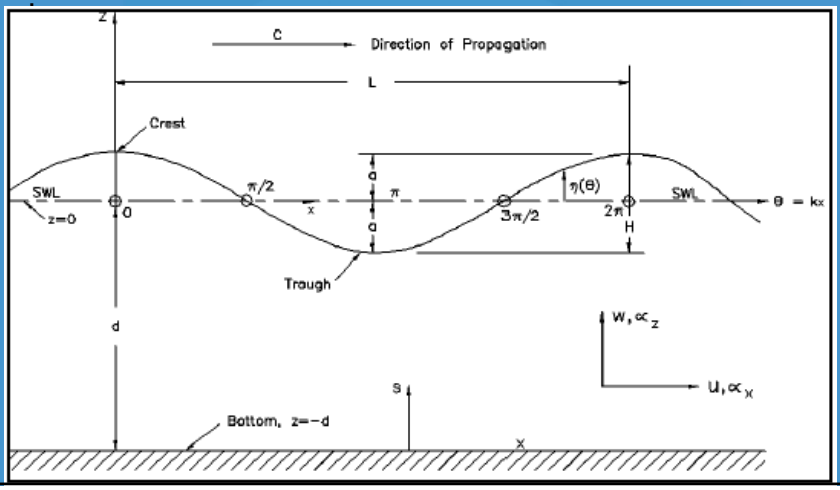
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

ETSECCPB. Teoría Lineal de Oleaje

Teoría Lineal. Definición del Problema

- Aproximación al problema (válida solo donde las suposiciones básicas se cumplen)
  - Otras teorías mas complejas de orden superior
  - Descripción física del oleaje
    - debe de abarcar la forma de la superficie del agua
      - » Altura (distancia vertical de la cresta al seno)
      - » longitud (distancia horizontal entre dos crestas)
      - » periodo (lapso de tiempo en el cual dos crestas sucesivas pasan por el mismo punto)
      - » movimiento del fluido bajo la ola.

Teoría Lineal. Definición del Problema



Teoría Lineal. Terminología Empleada

- h = profundidad del agua
- η = elevación de la superficie libre a partir de $z = 0$
- a = amplitud
- H = altura de ola (= 2a para olas sinusoidales)
- L = Longitud de onda
- T = Periodo
- c = velocidad de propagación de la ola (celeridad = L/T)
- k = número de onda = $2\pi/L$
- ω = frecuencia angular = $2\pi/T$
- u, w = componentes horizontal y vertical del vector velocidad
- g = gravedad
- ρ = densidad del agua
- ϕ = potencial de velocidad

$$\vec{u} = \vec{\nabla}\phi \begin{cases} u = \dfrac{\partial \phi}{\partial x} \\ w = \dfrac{\partial \phi}{\partial z} \end{cases}$$

Teoría Lineal. Hipótesis Simplificativas

i. Fluido homogéneo, incompresible..... $\frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$
ii. Se desprecia la tensión superficial
iii. Se desprecia el efecto de Coriolis
iv. La presión en la superficie libre es uniforme y constante
v. Fluido no Viscoso
vi. Fluido Irrotacional..... $\frac{\partial u}{\partial z} = \frac{\partial w}{\partial x}$
vii. Fondo plano e impermeable

(condiciones de un fluido ideal, ambas esenciales para poder introducir el potencial de velocidad)

Define la condición cinemática de contorno en el fondo

viii. La ola no interactúa con ningún otro movimiento del fluido
ix. No hay perdida de energía

Se propaga sobre enormes distancias sin perder energía

x. Oleaje plano (crestas largas) en dos dimensiones (*x*, *z*)
xi. Altura de ola muy pequeña en relación a su longitud y la forma es invariante en el espacio y en el tiempo.

Linealiza la solución

Teoría Lineal. Planteamiento Matemático

– La suposición de un fluido no viscoso e irrotacional (fluido ideal) → conlleva la existencia de un potencial de velocidad

– Un fluido ideal debe satisfacer la ecuación de continuidad de la masa

en terminos de componentes de la velocidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

en terminos del potencial de velocidad (Ec. Laplace)

$$\nabla^2 \phi = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \phi}{\partial z^2} = 0$$

Teoría Lineal. Planteamiento Matemático

- La ecuación de gobierno presenta un valor en la frontera
- Hay varias condiciones de contorno en el dominio del problema que afectan la forma y complejidad de la solución de la ecuación de Laplace

- Condición de contorno del fondo (BBC)
  - El fondo es impermeable → el fluido no pasa a través del fondo
  - La velocidad vertical en el fondo es nula

$$\left.\frac{\partial \phi}{\partial z} = 0\right|_{\text{en } z\,=\,-h}$$

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Oleaje. Teoría Lineal

Teoría Lineal. Planteamiento Matemático

- Condición cinemática de contorno en la superficie libre (KFSBC)
  - La velocidad de la partícula de fluido normal a la superficie libre es igual a la velocidad de la superficie libre
    - La partícula se mueve CON la superficie libre

$$\left.\frac{\partial \eta}{\partial t} + \frac{\partial \phi}{\partial x}\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\partial \phi}{\partial z} = 0\right|_{\text{en } z\,=\,\eta}$$

Teoría Lineal. Planteamiento Matemático

- Condición dinámica de contorno en la superficie libre (DFSBC)
  - Expresada como la ecuación de Bernoulli
    - La presión en la superficie libre es constante
  - Este requerimiento viene de la suposición de que la presión atmosférica sobre el fluido es por si misma constante
  - ∴ La tensión superficial es nula en la interfase agua-atmósfera

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \frac{1}{2}\left[\left(\frac{\partial \phi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \phi}{\partial z}\right)^2\right] + g\eta = f(t)\Big|_{\text{en } z\,=\,\eta}$$

Teoría Lineal. Planteamiento Matemático

- Periodicidad:
  - La ola es periódica en el tiempo y en el espacio

$$\phi(x,t) = \phi(x+L,t)$$
$$\phi(x,t) = \phi(x,t+T)$$

Teoría Lineal. Solución

- Suposiciones adicionales simplificativas
  - Las ecuaciones diferenciales parciales de la condiciones de contorno en la superficie libre no se pueden resolver
  - Son no lineales y ocurren en z = η, que es inicialmente una incógnita
  - La teoría lineal se deriva de aplicar las suposiciones simplificativas relacionadas con las condiciones de la superficie libre
    - La altura de ola H es muy pequeña con respecto a la longitud de la ola y con respecto de la profundidad
    - *H* << *L* y *H* << *h*
    - Los términos no lineales que contienen los productos de los términos del orden de H se pueden despreciar en comparación con los términos lineales de orden H.
    - Las condiciones de contorno de superficie libre se pueden aplicar al nivel del agua en reposo (z = 0)

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Oleaje. Teoría Lineal

Teoría Lineal. Solución

- Las condiciones de contorno linealizadas se reducen a:

$$\text{KFSBC} \quad \frac{\partial \phi}{\partial z} - \frac{\partial \eta}{\partial t} = 0 \quad \text{en } z = 0$$

$$\text{DFSBC} \quad \frac{\partial \phi}{\partial t} + g\eta = 0 \quad \text{en } z = 0$$

Teoría Lineal. Solución

– Descripción física del oleaje :
- debe de abarcar la forma de la superficie del agua, es decir, su altura (distancia vertical de la cresta al seno), longitud (distancia horizontal entre dos crestas)

$$\eta(x,t) = \frac{H}{2}\cos(kx - \omega t)$$

Esta expresión representa una onda sinusoidal, periódica y progresiva viajando en la dirección *x*

Donde:

– η es la forma de la superficie libre
– k es el número de onda
– ω es la frecuencia angular
– L es la longitud de onda
– T es el periodo

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Oleaje. Teoría Lineal

Teoría Lineal. Solución

- Potencial de Velocidad

$$\phi = \frac{\pi H}{kT}\frac{\cosh\left(k(z+h)\right)}{\sinh(kh)}\sin(kx - \omega t)$$

o

$$\phi = \frac{gH}{2\omega}\frac{\cosh\left(k(z+h)\right)}{\cosh(kh)}\sin(kx - \omega t)$$

Teoría Lineal. Solución

- Relación de Dispersión

$$\omega^2 = gk\left(\tanh\left(kh\right)\right) \quad \text{o} \quad c^2 = \frac{g}{k}\tanh(kh)$$

$$h = \text{profundidad}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \text{fase}$$

$$k = \frac{2\pi}{L} = \text{numero de onda}$$

Describe la forma en la que un campo de oleaje con muchas frecuencias se separará o dispersará debido a las diferentes celeridades de las frecuencias componentes

Teoría Lineal. Solución

Sustituyendo ω y k en la relación de dispersión:

$$L = \frac{gT^2}{2\pi}\left(\tanh\left(kh\right)\right)$$

– Tomando en cuenta la simplificación de aguas profundas (tanh (kh)) $\rightarrow$ 1

$$L_0 = \frac{gT^2}{2\pi}$$

Subíndice $_0$ indica aguas profundas y el subíndice $_b$ indica en rotura

– Esta aproximación está limitada por $h < ½\, L_0$ y limita el error en su uso a menos del 5% comparado con el uso de la expresión general

Teoría Lineal. Solución

- Soluciones alternativas para L

Eckart, 1952 $$L = \frac{gT^2}{2\pi}\sqrt{\left(\tanh\left(\frac{4\pi^2 h}{gT^2}\right)\right)}$$

Fenton, 1990 $$L = \frac{gT^2}{2\pi}\left(\tanh\left(\left(\frac{2\pi h}{L_0}\right)^{\frac{3}{4}}\right)\right)^{\frac{2}{3}}$$

Teoría Lineal. Solución

- De la relación de dispersión:
  - se deduce que la velocidad de propagación de la ola (también llamada velocidad de fase) puede relacionarse con su periodo y longitud
  - ∴ mientras mayor sea su longitud, mayor será su velocidad de propagación
  - la distancia cubierta por la ola durante un periodo = *L*

$$c = \frac{\omega}{k} = \frac{L}{T} = \sqrt{\frac{gL}{2\pi}\left(\tanh\left(kh\right)\right)} = \frac{gT}{2\pi}\left(\tanh(kh)\right)$$

Teoría Lineal. Solución

– Tomando en cuenta la simplificación de aguas profundas h/L → ∞ ⇒ (tanh (*kh*)) → 1

$$c_0 = \sqrt{\frac{g L_0}{2\pi}} = \frac{gT}{2\pi}$$

– Tomando en cuenta la simplificación de aguas someras *h*/*L* → 0 ⇒ (tanh (*kh*)) → *kh*

$$c_s = \sqrt{gh}$$

– Durante la propagación: *T* → invariable, *L* y *c* disminuyen y *H* disminuye y luego aumenta (*shoaling*)

Aproximaciones útiles

función	expresión	aproximación aguas profundas	aproximación aguas someras
$\sinh(\alpha)$	$e^{\alpha} - e^{-\alpha}$	$\frac{1}{2}e^{\alpha}$	α
$\cosh(\alpha)$	$e^{\alpha} + e^{-\alpha}$	$\frac{1}{2}e^{\alpha}$	1
$\tanh(\alpha)$	$\frac{e^{\alpha} - e^{-\alpha}}{e^{\alpha} + e^{-\alpha}}$	1	α

Teoría Lineal. Solución

– En el estudio de los procesos costeros, frecuentemente es deseable conocer los movimientos, velocidades y aceleraciones locales en el fluido para varios valores de *h* y *T* durante el paso de la ola

Componente horzontal

$$u = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\cosh\left[k(z+h)\right]}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$$

$\sinh(\alpha)=½(e^{\alpha}-e^{-\alpha})$

$\cosh(\alpha)=½(e^{\alpha}+e^{-\alpha})$

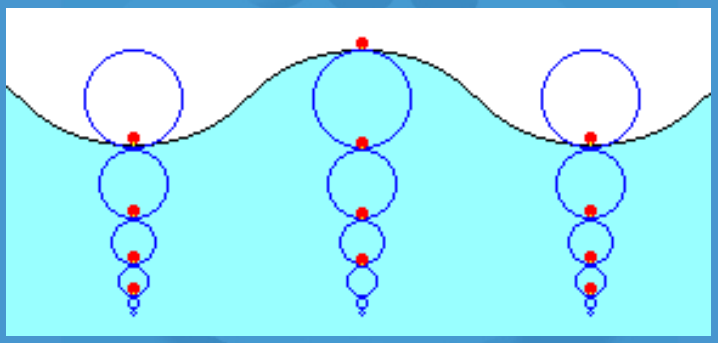
Componente vertical

$$w = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\sinh\left[k(z+h)\right]}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$$

El sistema de referencia está sobre el nivel del agua en reposo, de tal manera que en la superficie, *z* = 0 y en el fondo, *z* = -*h*

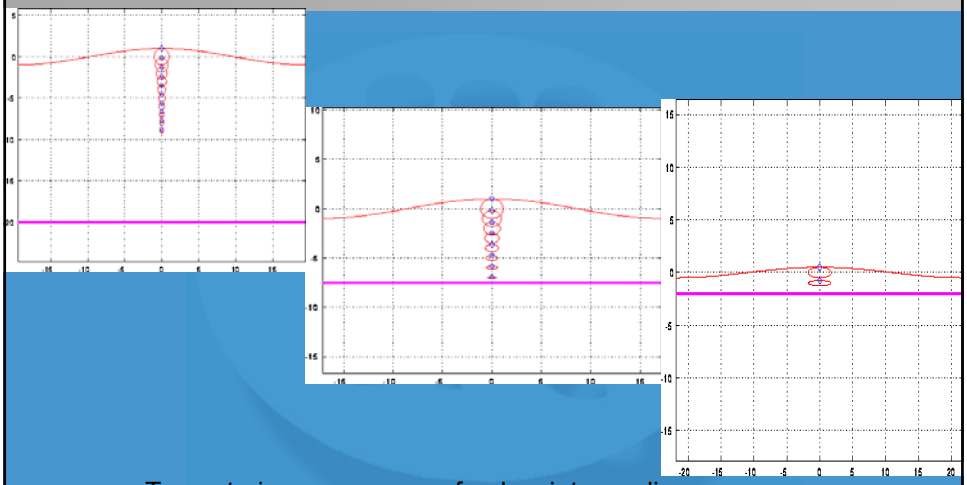
Teoría Lineal. Solución

– Flujo oscilatorio



Velocidades y Trayectorias con oleaje en aguas profundas

Teoría Lineal. Solución



Trayectorias en aguas profundas, intermedias y someras

Teoría Lineal. Solución

- **Flujo oscilatorio**
  - Las velocidades son periódicas en *x* y *t*.
  - trayectorias cerradas
    - De aquí que, *u* y *w* sean conocidas como velocidades orbitales
    - Implican que no hay un transporte de masa
  - Las ecuaciones expresan las velocidades a cualquier distancia del fondo (*z*+*h*)
  - Las funciones hiperbólicas **sinh** y **cosh** como función de *z* implican que la magnitud de la velocidad (y ∴ el diámetro de las trayectorias) va decreciendo exponencialmente con la profundidad
  - circulares en aguas profundas y elípticas en aguas intermedias / someras.

Teoría Lineal. Solución

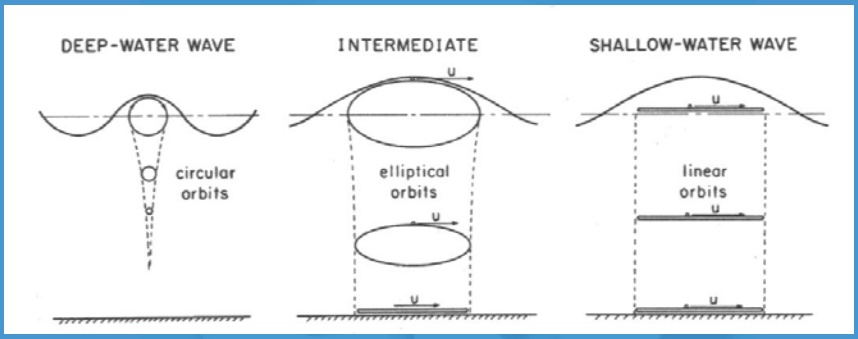
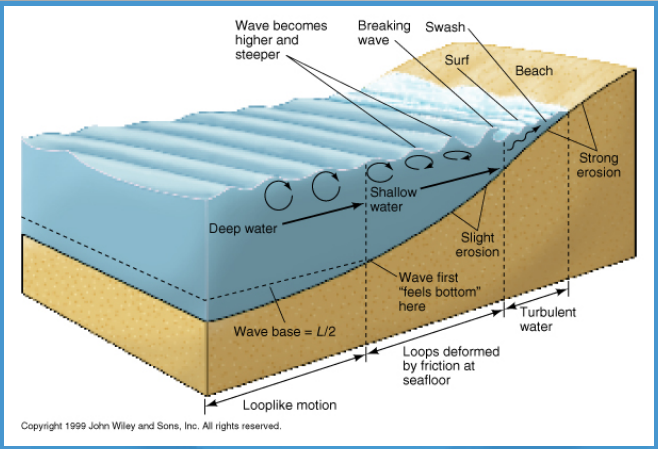


Diagrama de movimientos orbitales para olas lineales, en las que la órbita es circular en aguas profundas, elípticas en aguas intermedias y casi planas en aguas someras

Teoría Lineal. Solución



3 dominios de propagación en función de la relación h/l, y la deformación del oleaje al llegar a la costa hasta romper

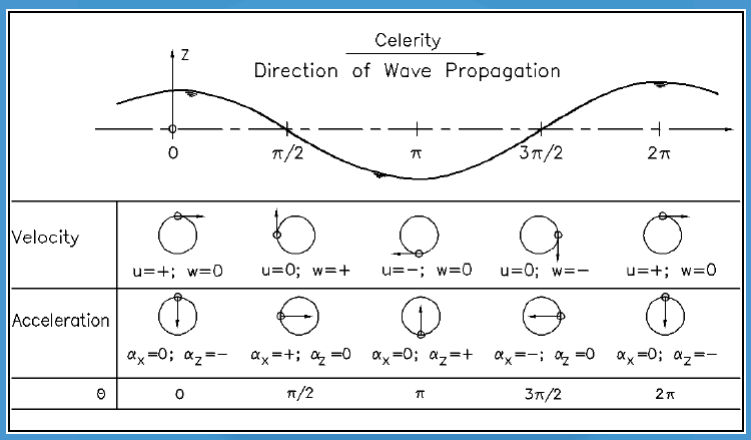
Teoría Lineal. Solución

- Distribución de velocidades bajo la ola
  - $(kx\text{-}\omega t) = 0, \pi \rightarrow \eta = {}^1/_2\,H, -{}^1/_2\,H$
    - Máxima horizontal (+) bajo la cresta ($\theta = 0, 2\pi$, etc.)
      - » Sentido de propagación de la onda
    - Máxima horizontal (-) bajo el seno ($\theta = \pi, 3\pi$, etc.)
      - » Sentido contrario a la propagación de la onda
    - Nulas bajo el paso por cero
  - $(kx\text{-}\omega t) = {}^1/_2\,\pi, {}^3/_2\pi \rightarrow \eta = 0$
    - Máxima vertical descendente y ascendente respectivamente

cresta $u_{\max} = \dfrac{\pi H}{T}\dfrac{\cosh[k(z+h)]}{\sinh kh}$ fondo $u_{\max} = \dfrac{\pi H}{T}\dfrac{1}{\sinh kh}$

$\therefore \quad u_{\max} = \omega A_x$

Teoría Lineal. Solución



Distribución de velocidades y aceleraciones bajo la ola

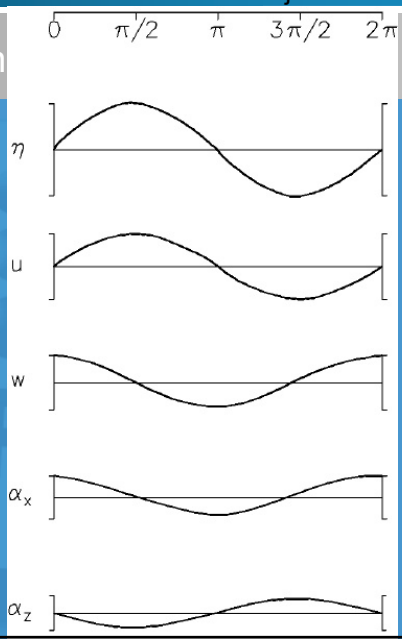
Teoría Lineal. Solución

– Aceleraciones
  - Se obtienen derivando con respecto del tiempo las ecuaciones de las velocidades orbitales

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha_x = \frac{g\pi H}{L}\frac{\cosh\ k(z+h)}{\cosh kh}\sin(kx-\omega t)$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \alpha_z = -\frac{g\pi H}{L}\frac{\sinh k(z+h)}{\cosh kh}\cos(kx-\omega t)$$

Teoría Lineal. Solución



Distribución de velocidades y aceleraciones bajo la ola

Teoría Lineal. Solución

- Desplazamientos
  - Integrando las ecuaciones de las velocidades orbitales
    - Elipse con semiejes horizontal A_x y vertical A_z
  - Diámetro que decae exponencialmente con la profundidad
  - En $z = {}^1/_2\, L_0$, los diámetros se vuelven prácticamente nulos
  - Los desplazamientos dependen de k ($\therefore$ L, y $\therefore$ T)
    - A mayor longitud (periodo), el flujo se "sentirá a mayor profundidad"

$$\xi = -\frac{H}{2}\frac{\cosh\ k(z+h)}{\sinh kh}\sin(kx-\omega t) \quad y \quad \zeta = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh kh}\cos(kx-\omega t)$$

$$\text{en el fondo } w = 0\text{, asi que en } z = -h \begin{cases} \xi = \dfrac{H}{2}\dfrac{1}{\sinh kh} \\ \zeta = 0 \end{cases}$$

Teoría Lineal. Solución

- Desplazamientos
  - Expresando los desplazamientos en términos de seno y coseno y sumándolos, de tal manera que $\sin^2(\theta)+\cos^2(\theta)=1$

$$\sin^2(kx-\omega t) = \left[\frac{\xi}{a}\left(\frac{\sinh kh}{\cosh\ k(z+h)}\right)\right]^2$$

y

$$\cos^2(kx-\omega t) = \left[\frac{\zeta}{a}\left(\frac{\sinh kh}{\sinh k(z+h)}\right)\right]^2$$

$$\frac{\xi^2}{A^2}+\frac{\zeta^2}{B^2}=1$$

Ecuación de una elipse, donde
A es el semieje mayor y B el semieje menor

Teoría Lineal. Solución

– Donde:

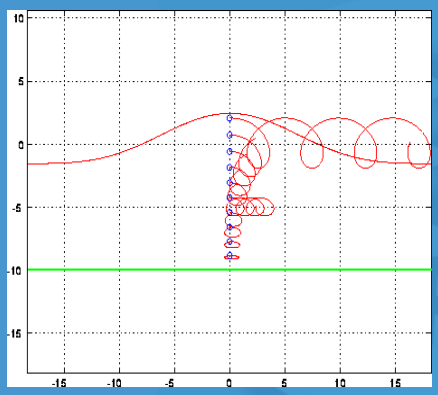
$$A = \frac{H}{2}\frac{\cosh k(z+h)}{\sinh(kh)}$$

y

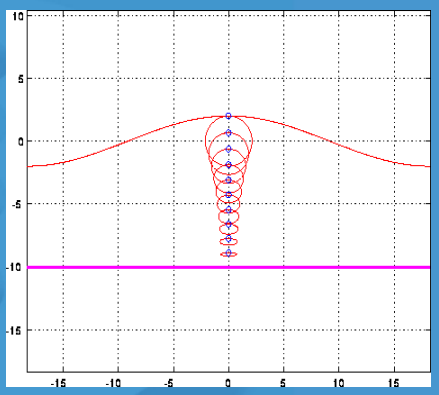
$$B = \frac{H}{2}\frac{\sinh k(z+h)}{\sinh(kh)}$$

– Las longitudes de A y B son la medida de los desplazamientos horizontales y verticales respectivamente
– Estas ecuaciones en aguas profundas predicen un desplazamiento idéntico (A = B) por lo que las orbitas son circulares y cerradas
  • En realidad no es así: hay transporte de masa

Teoría Lineal. Solución



ONDA DE STOKES II (PROGRESIVA)



TEORÍA LINEAL

Comparación de Ondas Teóricas

Teoría Lineal. Solución

– El desplazamiento vertical varía de 0 en aguas someras a ½ *H* en aguas profundas

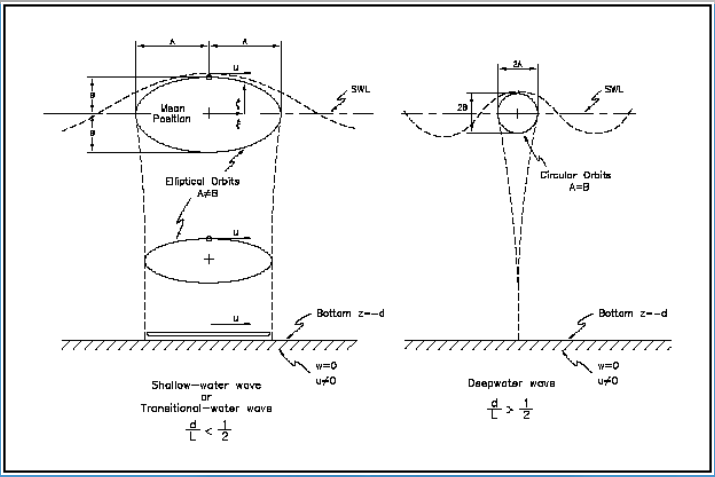
$$A = B = \frac{H}{2} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \quad \text{aguas profundas}$$

aguas someras:

$$A = \frac{H}{2} \frac{L}{2\pi h}$$

$$B = \frac{H}{2}\left(1 + \frac{z}{h}\right)$$

Teoría Lineal. Solución



Desplazamientos

Teoría Lineal. Solución

- Presión sub-superficial
  - La presión bajo el paso de una ola tiene dos componentes
    - Presión dinámica
    - Presión hidrostática

$$p' = \underbrace{\frac{\rho g H \cosh k(z+h)}{2\cosh\,(kh)}\cos(kx-\omega t)}_{\text{Presion dinamica debida a la aceleracion del fluido}} - \underbrace{\rho g z}_{\text{Presion hidrostatica}} + p_a$$

p' es la presión absoluta
ρ es la densidad del fluido (1025 kg/m^3)
p_a es la presión atmosférica

Teoría Lineal. Solución

- La presión medida con un sensor (mareógrafo)
  - Presión absoluta
  - Presión atmosférica

$$p = p' - p_a = \frac{\rho g H \cosh k(z+h)}{2\cosh\,(kh)}\cos(kx-\omega t) - \rho g z$$

dado que $\eta = \frac{H}{2}\cos(kx-\omega t)$

$$p = p' - p_a = \rho g \eta \underbrace{\left(\frac{\cosh k(z+h)}{\cosh\,(kh)}\right)}_{\text{factor de respuesta a la presion } K_z} - \rho g z$$

$$\therefore \quad p = \rho g\left(\eta K_z - z\right)$$

$$K_z = K = \left.\frac{1}{\cosh\,(kh)}\right|_{\text{en } z\,=\,-h}$$

Teoría Lineal. Solución

- Obtención de la altura de ola a través de un sensor de presión a partir de:

$$p = \rho g \left(\eta K_z - z \right)$$

$$\eta = \frac{N \left(p + \rho g z \right)}{\rho g K_z}$$

Donde *N* es un factor de corrección (=1 si se usa teoría lineal)

Teoría Lineal. Solución

- **Velocidad de Grupo c_g:**
  - Describe la velocidad a la que viaja la Energía:
    - Espacio
    - Tiempo
  - No es igual a la velocidad (celeridad) de fase
  - Ondas de gravedad $c_g < c$
    - Ondas capilares $c_g > c$
  - Este concepto se deriva considerando la interacción de dos trenes de ondas sinusoidales
    - Propagándose en la misma dirección
    - Con la misma altura y periodos y longitudes de onda ligeramente distintos

$$\eta = \eta_1 + \eta_2 = \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_1} - \frac{2\pi t}{T_1} \right) + \frac{H}{2} \cos\left(\frac{2\pi x}{L_2} - \frac{2\pi t}{T_2} \right)$$

Teoría Lineal. Solución

– **Velocidad de Grupo c_g:**

- Dado que L_1 y L_2 son ligeramente distintos:
  - Para ciertos valores de x, η_1 y η_2 estarán en fase $\rightarrow \therefore$ la altura de ola observada será 2H mientras que para otros valores de x, la altura de ola observada será 0
  - En el perfil resultante (ec. Anterior), las ondas parecen moverse en grupos, descrito por la ecuación de la curva envolvente:

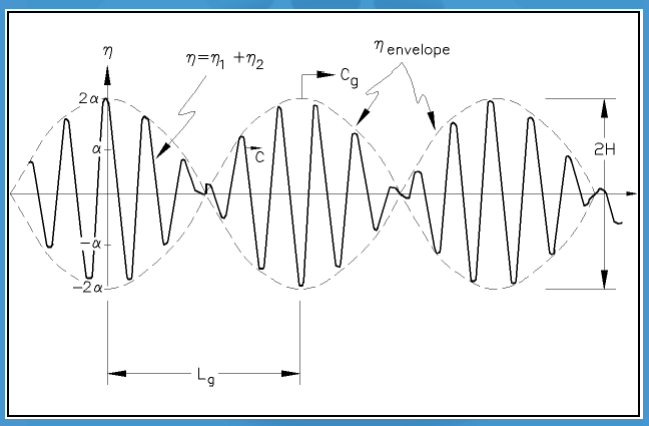
$$\eta_{\text{envolvente}} = \pm H \cos\left(\pi\left(\frac{L_2 - L_1}{L_1 L_2}\right)x - \pi\left(\frac{T_2 - T_1}{T_1 T_2}\right)t\right)$$

Esta ecuación representa la velocidad de grupo
(la velocidad de propagación de las curvas envolventes)

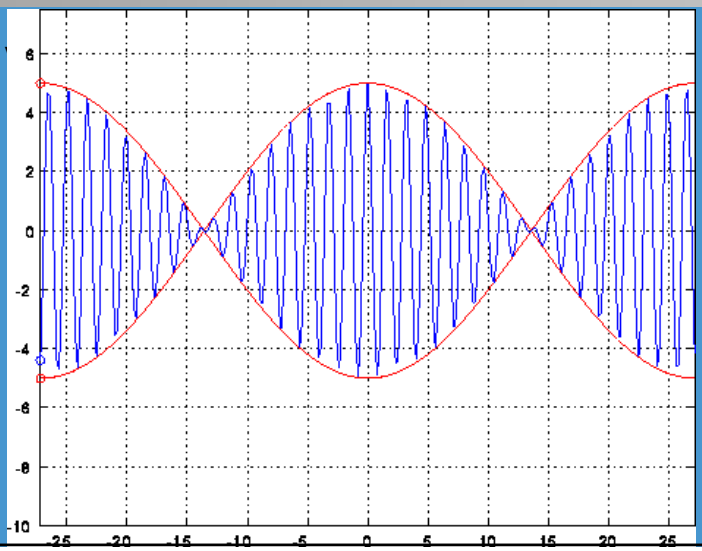
UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA
Oleaje. Teoría Lineal

Teoría Lineal. Solución

– **Velocidad de Grupo c_g:**



Teoría Lineal. Solución



Teoría Lineal. Solución

- Velocidad de Grupo c_g:
  - La velocidad límite del grupo de ondas cuando :
    - L_1 se aproxima a L_2 y por tanto, T_1 a T_2, es decir: $c_g = \frac{\partial \omega}{\partial k}$

$$c_g = \frac{1}{2}\frac{L}{T}\left(1+\left(\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\right) = nc$$

$$\text{donde } n = \frac{1}{2}\left(1+\left(\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right)\right)$$

$$\left(\frac{2kh}{\sinh(2kh)}\right) \to 0 \Big|_{\text{aguas profundas}}$$

Teoría Lineal. Solución

– Velocidad de Grupo c_g:
  - En aguas profundas:

$$c_{g0} = \frac{1}{2}\frac{L_0}{T} = \frac{1}{2}c_0$$

$$\sinh(2kh) \rightarrow 2kh\Big|_{\text{aguas someras}}$$

$$c_{gs} = \frac{L}{T} = c = \sqrt{gh}$$

• En aguas someras, donde la velocidad es función de la velocidad, el Oleaje deja de ser dispersivo, y todas las olas viajan a la misma velocidad

•No hay alternancia de sumas o restas de los componentes del oleaje

Teoría Lineal. Solución

– Energía y densidad de Energía
  - Energía total del oleaje es la suma de:
    – Energía Cinética
      » Asociada a las velocidades de las partículas de fluido (flujo oscilatorio)
    – Energía Potencial
      » Asociada al desplazamiento vertical de la superficie libre η

La energía cinética por unidad de longitud de cresta de ola es:

$$E_k = \int_x^{x+L}\int_{-h}^{\eta} \rho \frac{u^2 + w^2}{2}\,\mathrm{d}z\mathrm{d}x$$

$$E_k = \frac{1}{16}\rho g H^2 L$$

La energía potencial por unidad de longitud de cresta de ola es:

$$E_p = \int_x^{x+L} \rho g \left[\frac{(\eta + h)^2}{2} - \frac{h^2}{2}\right]\mathrm{d}x$$

$$E_p = \frac{1}{16}\rho g H^2 L$$

Teoría Lineal. Solución

– Energía y densidad de Energía
- Energía total (en una longitud de onda por unidad longitudinal de cresta de ola):
  - Energía Cinética + Energía Potencial (E_k + E_p)

$$E = E_k + E_p = \frac{1}{16}\rho g H^2 L + \frac{1}{16}\rho g H^2 L$$

$$E = \frac{1}{8}\rho g H^2 L$$

La energía total del oleaje por unidad superficial de área, denominada **Densidad de Energía** esta dada por:

$$\bar{E} = \frac{E}{L} = \frac{1}{8}\rho g H^2$$

Teoría Lineal. Solución

– Flujo de Energía
- Tasa de transmisión de energía en la dirección de propagación del oleaje a través de un plano perpendicular al avance del oleaje y en toda la columna de agua
- De acuerdo con la teoría lineal, el flujo medio de energía por unidad de anchura de cresta del oleaje a través de un plano perpendicular al avance del oleaje es:

$$\bar{P} = \frac{1}{T}\int_t^{t+r}\int_{-h}^{\eta} \rho u \, dz \, dt$$

$\bar{P} = \bar{E}nc = \bar{E}c_g$ donde $\bar{P}$ es el llamado flujo de energia

$\bar{P} = \bar{E}nc \sin\alpha$ si el plano no es perpendicular al avance

Teoría Lineal. Solución

- Flujo de Energía
  - De la obtención de la velocidad de grupo, tenemos que:

$$\bar{P}_0 = \frac{1}{2}\bar{E}_0 c_0 \Big|_{\text{aguas profundas}}$$

$$\bar{P} = \bar{E}\, c_g = \bar{E}\, c \Big|_{\text{aguas someras}}$$

Teoría Lineal. Resumen

Relative Depth	Shallow Water $\frac{d}{L} < \frac{1}{25}$	Transitional Water $\frac{1}{25} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$	Deep Water $\frac{d}{L} < \frac{1}{2}$
1. Wave profile	Same As >	$\eta = \frac{H}{2}\cos\left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T}\right] = \frac{H}{2}\cos\theta$	< Same As
2. Wave celerity	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gd}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$C = C_0 = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}$
3. Wavelength	$L = T\sqrt{gd} = CT$	$L = \frac{gT^2}{2\pi}\tanh\left(\frac{2\pi d}{L}\right)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = C_0 T$
4. Group velocity	$C_g = C = \sqrt{gd}$	$C_g = nC = \frac{1}{2}\left[1 + \frac{4\pi d/L}{\sinh(4\pi d/L)}\right]C$	$C_g = \frac{1}{2}C = \frac{gT}{4\pi}$
5. Water particle velocity (a) Horizontal (b) Vertical	$u = \frac{H}{2}\sqrt{\frac{g}{d}}\cos\theta$ $w = \frac{H\pi}{T}\left(1+\frac{z}{d}\right)\sin\theta$	$u = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\cos\theta$ $w = \frac{H}{2}\frac{gT}{L}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\sin\theta$	$u = \frac{\pi H}{T}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$ $w = \frac{\pi H}{T}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$
6. Water particle accelerations (a) Horizontal (b) Vertical	$a_x = \frac{H\pi}{T}\sqrt{\frac{g}{d}}\sin\theta$ $a_z = -2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos\theta$	$a_x = \frac{g\pi H}{L}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\sin\theta$ $a_z = -\frac{g\pi H}{L}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)}\cos\theta$	$a_x = 2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$ $a_z = -2H\left(\frac{\pi}{T}\right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$
7. Water particle displacements (a) Horizontal (b) Vertical	$\xi = -\frac{HT}{4\pi}\sqrt{\frac{g}{d}}\sin\theta$ $\zeta = \frac{H}{2}\left(1+\frac{z}{d}\right)\cos\theta$	$\xi = -\frac{H}{2}\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)}\sin\theta$ $\zeta = \frac{H}{2}\frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)}\cos\theta$	$\xi = -\frac{H}{2}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\sin\theta$ $\zeta = \frac{H}{2}e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)}\cos\theta$
8. Subsurface pressure	$p = \rho g(\eta - z)$	$p = \rho g\eta\frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} - \rho g z$	$p = \rho g\eta\, e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} - \rho g z$