

Pere Prat

Ecuaciones Constitutivas  
**ELASTICIDAD y  
PLASTICIDAD**



Departament d'Enginyeria  
del Terreny, Cartogràfica i Geofísica

UNIVERSITAT POLITÈCNICA DE CATALUNYA

Pere Prat

Ecuaciones Constitutivas

**ELASTICIDAD y**

**PLASTICIDAD**

BARCELONA, NOVIEMBRE 2006

# Índice

<b>1</b>	<b>INTRODUCCIÓN .....</b>	<b>1</b>
<b>2</b>	<b>ELASTICIDAD.....</b>	<b>3</b>
2.1	TENSIONES Y DEFORMACIONES .....	3
2.2	ELASTICIDAD, HIPERELASTICIDAD, HIPOELASTICIDAD .....	5
2.2.1	<i>Materiales elásticos de Cauchy</i> .....	5
2.2.2	<i>Materiales hiperelásticos</i> .....	5
2.2.3	<i>Materiales hipoelásticos</i> .....	6
2.2.4	<i>Ejemplo</i> .....	6
2.3	RELACIÓN ELÁSTICA LINEAL GENERAL .....	7
2.3.1	<i>Material elástico lineal isótropo (clásico)</i> .....	7
2.3.2	<i>Relaciones alternativas:</i> .....	10
2.3.3	<i>Propiedades de la ley isótropa</i> .....	11
2.3.4	<i>Limitaciones a los parámetros de la ley</i> .....	12
2.4	FORMA MATRICIAL DE LAS RELACIONES TENSIÓN–DEFORMACIÓN .....	13
2.4.1	<i>Caso general</i> .....	14
2.4.2	<i>Tensión plana</i> .....	14
2.4.3	<i>Deformación plana</i> .....	15
2.4.4	<i>Axisimetría</i> .....	15
2.4.5	<i>Material transversalmente anisótropo</i> .....	16
2.5	RELACIONES ENTRE LAS CONSTANTES ELÁSTICAS .....	18
2.6	ELASTICIDAD NO LINEAL .....	19
2.6.1	<i>Introducción y conceptos básicos</i> .....	19
2.6.2	<i>Formulación de leyes elásticas no lineales</i> .....	22
2.7	RELACIONES INCREMENTALES EN ELASTICIDAD .....	28
2.7.1	<i>Por diferenciación de relaciones del tipo <math>\epsilon = f(\sigma)</math></i> .....	28
2.7.2	<i>Por modificación de la formulación lineal isótropa</i> .....	29
2.7.3	<i>Por formulación hipoelástica general</i> .....	30
<b>3</b>	<b>PLASTICIDAD .....</b>	<b>31</b>
3.1	INTRODUCCIÓN .....	31
3.2	FUNDAMENTOS BÁSICOS DE LA TEORÍA DE LA PLASTICIDAD .....	33
3.2.1	<i>Hipótesis de aditividad</i> .....	33
3.2.2	<i>Superficie de fluencia</i> .....	34
3.2.3	<i>Ley de fluencia</i> .....	35
3.2.4	<i>Ley de endurecimiento</i> .....	36
3.3	ECUACIÓN GENERAL DE LA PLASTICIDAD .....	36
3.3.1	<i>Cálculo del incremento de deformación plástica</i> .....	37
3.3.2	<i>Ejemplo: Bloque rígido a fricción</i> .....	37
3.3.3	<i>Generalización a plasticidad con <math>N</math> superficies de fluencia</i> .....	40
3.4	MODELOS DE PLASTICIDAD PERFECTA .....	40
3.4.1	<i>Modelo de von Mises</i> .....	43
3.4.2	<i>Modelo de Tresca</i> .....	45
3.4.3	<i>Modelo de Drucker-Prager</i> .....	47
3.4.4	<i>Modelo de Mohr-Coulomb</i> .....	48
3.5	MODELOS DE PLASTICIDAD ENDURECIBLE .....	51
3.5.1	<i>Rigidización isótropa</i> .....	51
3.5.2	<i>Rigidización cinemática</i> .....	53
3.6	DEFINICIÓN DE DRUCKER DE MATERIAL ESTABLE .....	54
3.7	FORMULACIÓN DE LA PLASTICIDAD PARA ELEMENTOS FINITOS .....	57
3.7.1	<i>Cálculo de la matriz de rigidez elastoplástica</i> .....	57
3.7.2	<i>Condición para que la matriz de rigidez sea simétrica</i> .....	59



# 1 Introducción

Los fundamentos básicos de la Mecánica del Medio Continuo requieren considerar una descripción matemática de la tensión y la deformación, así como de la velocidad de deformación, que experimenta el medio y establecer una serie de condiciones que deben cumplir. Así, por ejemplo, tenemos las ecuaciones de equilibrio para las tensiones y las ecuaciones de compatibilidad para las deformaciones. Sin embargo, estas ecuaciones no son suficientes para resolver problemas tensión–deformación. Para ello es necesario considerar también unas ecuaciones que caractericen cada tipo de material y su reacción a las cargas aplicadas. Estas ecuaciones se conocen como *ecuaciones constitutivas*, puesto que describen el comportamiento macroscópico que resulta de la constitución interna del material.

Los materiales, especialmente en estado sólido, se comportan de maneras muy complejas si consideramos todo el rango posible de temperaturas y deformaciones. Por ello no es factible escribir una ecuación, o conjunto de ecuaciones, que describa de forma precisa el comportamiento del material en todo el rango de comportamientos posibles. En su lugar, se formulan por separado distintas ecuaciones que describen distintos tipos *ideales* de respuesta del material. Cada una de ellas es una fórmula matemática diseñada para que aproxime el comportamiento físico observado del material real para un cierto rango restringido.

En los capítulos siguientes se presentan de forma simplificada las ecuaciones constitutivas para materiales ideales tales como el sólido lineal elástico (en el sentido de Hooke) en el Capítulo 2 y el sólido de comportamiento plástico en el Capítulo 3. Estas ecuaciones constitutivas clásicas fueron introducidas en su momento por separado, para resolver necesidades específicas y, por lo tanto, se hicieron lo más simples posible, simplificando muchas situaciones físicas reales.

En la actualidad la teoría moderna de las ecuaciones constitutivas para medios continuos empieza con ecuaciones constitutivas generalistas, para determinar a continuación los límites impuestos sobre la forma de estas ecuaciones por ciertos principios básicos. Las ecuaciones se especializan lo más tarde posible y tan poco como sea posible. Este enfoque tiene la ventaja de no ignorar los fenómenos de acoplamiento entre distintos tipos de comportamiento (p.e., térmico y mecánico) y proporciona resultados generales que se pueden aplicar a muchos casos y materiales específicos. Obviamente un tratamiento de este tipo cae fuera de las posibilidades de este curso.

En el Capítulo 2 de estas notas se presenta la teoría clásica de la elasticidad lineal. Un material se denomina *idealmente elástico* cuando un cuerpo formado por este material recupera su forma original de manera total una vez las fuerzas causantes de la deformación han sido retiradas, y cuando (para una cierta temperatura) existe una relación biunívoca entre los estados de tensión y de deformación.

En el Capítulo 3 se presenta la teoría clásica de la plasticidad. Esta teoría se desarrolló inicialmente para metales, pero en la actualidad sirve de marco de referencia para el desarrollo de ecuaciones constitutivas para diversos materiales de uso corriente en ingeniería. Para el análisis de los campos de tensión y de deformación en un medio continuo, la teoría de la plasticidad requiere establecer una *condición de fluencia* bajo un estado de tensiones combinado que permita establecer qué combinaciones de tensiones permiten un comportamiento inelástico, con deformaciones al menos parcialmente no recuperables. La teoría debe también especificar cómo se comporta el material una vez alcanzada esta condición de fluencia de manera que se pueda conocer cómo están relacionadas las deformaciones plásticas (i.e., no recuperables) con las componentes de la tensión, y cómo evoluciona la condición de fluencia con las deformaciones plásticas acumuladas. En este Capítulo 3 se discutirán estas cuestiones de forma amplia, utilizando la teoría del potencial plástico, y se presentarán varias de las condiciones de fluencia clásicas.

## Referencias

- Malvern, L. E.** (1969). *Introduction to the Mechanics of a Continuous Medium*. Prentice-Hall, Inc.
- Oliver, X. y Agelet, C.** (2000). *Mecánica de Medios Continuos para Ingenieros*. Edicions UPC

## 2 Elasticidad

### 2.1 Tensiones y deformaciones

Dados los tensores de tensiones  $\sigma_{ij}$  y de pequeñas deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}) \quad (2.1)$$

donde el vector  $\mathbf{u}$  indica los desplazamientos, las condiciones que deben cumplir los campos de tensiones y deformaciones son los siguientes:

▪ Equilibrio  $\sigma_{ij,j} + b_i = 0 \quad (2.2)$

▪ Compatibilidad  $\varepsilon_{ij,kl} + \varepsilon_{kl,ij} - \varepsilon_{ik,jl} - \varepsilon_{jl,ik} = 0 \quad (2.3)$

▪ Condiciones de contorno  $\sigma_{ij}n_j = \sigma_{ji}n_j = T_i \quad (2.4)$

▪ Material  $\sigma_{ij} = E_{ijkl}\varepsilon_{kl} \quad (2.5)$

donde  $\mathbf{b}$  es un vector de fuerzas másicas,  $\mathbf{T}$  el vector de tensiones en el contorno,  $\mathbf{n}$  el vector normal al contorno.

Las condiciones de compatibilidad (2.3) indican que el cuerpo debe permanecer continuo durante la deformación (es decir, no puede haber fisuras ni solapamientos). Por este motivo no se pueden dar, de forma arbitraria, 6 componentes de deformación que sean función de las tres componentes del vector de desplazamientos  $\mathbf{u}$ . El tensor de deformaciones debe cumplir por este motivo las condiciones adicionales de integrabilidad (2.3). Un conjunto de desplazamientos  $\{u_i\}$  y deformaciones  $\{\varepsilon_{ij}\}$  que cumpla las condiciones anteriores es un conjunto cinemáticamente admisible. Si  $\{u_i\}$  es dado, entonces las ecuaciones (2.1) permiten obtener deformaciones compatibles (una deformación continua es posible con un número infinito de campos de desplazamientos).

Si se trabaja con desplazamientos  $\{u_i\}$  como variables a determinar (usual en el método de los elementos finitos), no es necesario usar las ecuaciones de compatibilidad (2.3). En este caso el número de incógnitas a determinar son 9 (seis componentes del tensor de tensiones y tres componentes del vector de desplazamientos).

A las tres ecuaciones de equilibrio (2.2) disponibles para resolver el problema tensión–deformación, es necesario añadir otras seis: son las ecuaciones que rigen el comportamiento del material (2.5), las **ecuaciones constitutivas** o **leyes de comportamiento del material**. Son las ecuaciones que expresan la relación entre las tensiones aplicadas sobre un cierto cuerpo y las deformaciones que las mismas provocan. El tensor de cuarto orden  $\mathbf{E}$  es el tensor de rigidez.

Dentro del marco de la mecánica del medio continuo, es habitual trabajar en términos de los *invariantes de tensión y deformación*, en lugar de hacerlo directamente en términos de las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones. Como recordatorio y con el fin de unificar la nomenclatura, se incluyen en este apartado las definiciones de los invariantes del tensor de tensiones y del tensor de deformaciones que se utilizarán más adelante.

#### Invariantes del tensor de tensiones ( $\boldsymbol{\sigma}$ )

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sigma_{kk} = \sigma_x + \sigma_y + \sigma_z = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 \\
 I_2 &= \frac{1}{2}(\sigma_{ij}\sigma_{ij} - \sigma_{kk}^2) = -(\sigma_x\sigma_y + \sigma_x\sigma_z + \sigma_y\sigma_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 &= -(\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3 + \sigma_2\sigma_3) \\
 I_3 &= \det \boldsymbol{\sigma} = \sigma_x\sigma_y\sigma_z + 2\tau_{xy}\tau_{xz}\tau_{yz} - \sigma_x\tau_{yz}^2 - \sigma_y\tau_{xz}^2 - \sigma_z\tau_{xy}^2 = \sigma_1\sigma_2\sigma_3
 \end{aligned} \tag{2.6}$$

#### Invariantes del tensor **desviador** de tensiones ( $\mathbf{s} = \boldsymbol{\sigma} - \sigma_m \mathbf{I}$ )

$$\begin{aligned}
 J_1 &= 0 \\
 J_2 &= \frac{1}{2}s_{ij}s_{ij} = -(s_x s_y + s_x s_z + s_y s_z) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 &= \frac{1}{2}(s_x^2 + s_y^2 + s_z^2) + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 &= \frac{1}{6}[(\sigma_x - \sigma_y)^2 + (\sigma_x - \sigma_z)^2 + (\sigma_y - \sigma_z)^2] + \tau_{xy}^2 + \tau_{xz}^2 + \tau_{yz}^2 \\
 J_3 &= \det \mathbf{s}
 \end{aligned} \tag{2.7}$$

#### Invariantes del tensor de deformaciones ( $\boldsymbol{\varepsilon}$ )

$$\begin{aligned}
 I_1^\varepsilon &= \varepsilon_{kk} \\
 I_2^\varepsilon &= \frac{1}{2}(\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} - \varepsilon_{kk}^2) \\
 I_3^\varepsilon &= \det \boldsymbol{\varepsilon}
 \end{aligned} \tag{2.8}$$

#### Invariantes del tensor **desviador** de deformaciones ( $\mathbf{e} = \boldsymbol{\varepsilon} - \frac{1}{3}\varepsilon_{vol}\mathbf{I}$ )

$$\begin{aligned}
 J_1^\varepsilon &= 0 \\
 J_2^\varepsilon &= \frac{1}{2}e_{ij}e_{ij} \\
 J_3^\varepsilon &= \det \mathbf{e}
 \end{aligned} \tag{2.9}$$



## 2.2 Elasticidad, hiperelasticidad, hipoelasticidad

La ley constitutiva elástica tiene muchas deficiencias como se verá: no predice deformaciones permanentes (no recuperables), no predice rotura, las componentes volumétrica y desviadora están desacopladas (es decir, no hay dilatación), etc. Entonces nos podemos preguntar, ¿porqué elasticidad? Las razones, entre otras, son:

- Muchos problemas son elásticos si estamos suficientemente alejados de rotura por coeficiente de seguridad.
- La elasticidad forma parte de formulaciones más avanzadas (por ejemplo: elasto-plasticidad)

La formulación de leyes constitutivas en el marco de la teoría de la elasticidad supone que el comportamiento del material es independiente del tiempo y de la temperatura.

### 2.2.1 Materiales elásticos de Cauchy

La relación más simple elástica entre tensión y deformación es del tipo

$$\sigma_{ij} = F_{ij}(\varepsilon_{kl}) \quad (2.10)$$

donde  $F_{ij}$  representa una función tensorial de las deformaciones, sin ninguna restricción. Esta formulación implica lo siguiente:

- Reversibilidad (no hay deformaciones permanentes)
- Independencia entre tensiones y trayectoria de deformaciones (sólo dependen de valores *instantáneos*)
- Se puede generar energía en ciclos de carga y descarga
- Se pueden violar leyes termodinámicas (ver ejemplo a continuación)

### 2.2.2 Materiales hiperelásticos

En esta formulación se supone que existe una función escalar de las deformaciones  $W(\varepsilon_{ij})$ , que es un potencial (energía de deformación), tal que

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.11)$$

Con esta definición, se evitan los problemas de generación de energía en ciclos cerrados de deformación.

### 2.2.3 Materiales hipoelásticos

La formulación es de tipo incremental, donde las tensiones dependen del estado actual (instantáneo) y del camino de deformaciones (o tensiones) seguido.

$$\dot{\sigma}_{ij} = F_{ij}(\dot{\varepsilon}_{kl}, \sigma_{mn}) \quad (2.12)$$

### 2.2.4 Ejemplo

En este ejemplo se verá el caso de un material elástico lineal de Cauchy que viola los principios de la Termodinámica.

Para este ejemplo se trabajará en dos dimensiones (problema plano). Se propone la siguiente relación constitutiva:

$$\begin{aligned} \sigma_1 &= a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2 \\ \sigma_2 &= a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2 \end{aligned} \quad (2.13)$$

Calculemos  $W = \int_A^C \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}$  para las trayectorias ABC y ADC de la Figura 2-1.

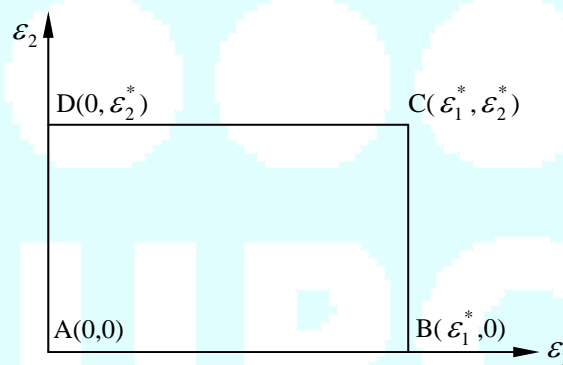


Figura 2-1.

Trayectoria ABC:

$$\begin{aligned} W_{ABC} &= \int_A^B (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2) + \int_B^C (\sigma_1 d\varepsilon_1 + \sigma_2 d\varepsilon_2) \\ &= \int_{(0,0)}^{(\varepsilon_1^*, 0)} (a_{11}\varepsilon_1 + a_{12}\varepsilon_2) d\varepsilon_1 + \int_{(\varepsilon_1^*, 0)}^{(\varepsilon_1^*, \varepsilon_2^*)} (a_{21}\varepsilon_1 + a_{22}\varepsilon_2) d\varepsilon_2 \\ &= a_{11} \frac{(\varepsilon_1^*)^2}{2} + a_{21}\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + a_{22} \frac{(\varepsilon_2^*)^2}{2} \end{aligned}$$

Análogamente para la trayectoria ADC:  $W_{ADC} = a_{11} \frac{(\varepsilon_1^*)^2}{2} + a_{12}\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* + a_{22} \frac{(\varepsilon_2^*)^2}{2}$

Observamos que los valores del trabajo no coinciden, y que por tanto, en el ciclo cerrado ABCDA, se genera una energía

$$W_{ABCD} = (a_{21} - a_{12})\varepsilon_1^* \varepsilon_2^* \neq 0 \quad (2.14)$$

que puede ser positiva o negativa dependiendo de los valores de  $a_{21}$  y  $a_{12}$ . Sólo será nula si  $a_{21} = a_{12}$  es decir, si la matriz de coeficientes elásticos es simétrica. Esta propiedad se puede generalizar a relaciones en tres dimensiones y con todas las componentes de los tensores de tensiones y deformaciones: la condición para que un material sea hiperelástico es que la matriz de coeficientes elásticos sea simétrica.

### 2.3 Relación elástica lineal general

La ley constitutiva elástica más general tiene la siguiente forma

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl} \quad (2.15)$$

Por simetría de los tensores de tensiones y deformaciones ( $\sigma_{ij} = \sigma_{ji}$ ,  $\varepsilon_{ij} = \varepsilon_{ji}$ ), sólo hay seis términos independientes  $\sigma_{ij}$  y en  $\varepsilon_{ij}$ . Por lo tanto, el tensor de rigidez elástico  $\mathbf{E}$  puede tener como máximo 36 constantes independientes (dado que  $E_{ijkl} = E_{jikl} = E_{ijlk} = E_{jilk}$ ), en el caso más general (material elástico de Cauchy)

- Para un material hiperelástico, la matriz de rigidez debe ser simétrica ( $E_{ijkl} = E_{klij}$ ) y por lo tanto sólo puede tener 21 constantes independientes.
- Si existe un plano de simetría, 13 constantes independientes
- Si existen tres planos de simetría (ortotropía), 9 constantes independientes
- Si existe un eje de simetría (anisotropía transversal), 5 constantes independientes
- Si existen tres ejes de simetría (isotropía), 2 constantes independientes

#### 2.3.1 Material elástico lineal isótropo (clásico)

La expresión más general para un material elástico lineal isótropo es la conocida ley de Hooke, que se escribe como

$$\sigma_{ij} = \lambda \varepsilon_{kk} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij} \quad (2.16)$$

donde las constantes elásticas  $\lambda$  y  $\mu$  son los coeficientes de Lamé, y  $\delta_{ij}$  es el tensor identidad (delta de Kroenecker).

Para obtener la expresión inversa (deformaciones en función de las tensiones), primero contraemos índices en la ecuación (2.16):

$$\sigma_{kk} = \lambda \varepsilon_{kk} \cdot 3 + 2\mu \varepsilon_{kk} = (3\lambda + 2\mu) \varepsilon_{kk} \Rightarrow \varepsilon_{kk} = \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)}$$

Substituyendo en la ecuación (2.16),

$$\sigma_{ij} = \lambda \frac{\sigma_{kk}}{(3\lambda + 2\mu)} \delta_{ij} + 2\mu \varepsilon_{ij}$$

y despejando el tensor de deformaciones

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.17)$$

Veamos a continuación algunos casos particulares de los que se deducen relaciones entre diversos parámetros comúnmente utilizados:

### 2.3.1.1 Condiciones de compresión / tracción simple



En estas condiciones, la única componente no nula del tensor de tensiones es  $\sigma_{11}$ . Se definen el **módulo de Young** ( $E$ ), y el **coeficiente de Poisson** ( $\nu$ ) de la siguiente manera:

$$E = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}}, \quad \nu = -\frac{\varepsilon_{22}}{\varepsilon_{11}} \quad (2.18)$$

Para buscar la relación existente entre las constantes elásticas  $E$  y  $\nu$  con las constantes de Lamé, aplicamos la ecuación general (2.17) al caso unidimensional:

$$\varepsilon_{11} = \frac{\sigma_{11}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \delta_{11} = \frac{(\lambda + \mu)\sigma_{11}}{\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

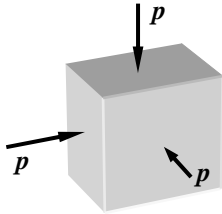
$$\varepsilon_{22} = \frac{\sigma_{22}}{2\mu} - \frac{\lambda}{2\mu(3\lambda + 2\mu)} (\sigma_{11} + \sigma_{22}) \delta_{22} = \frac{-\lambda\sigma_{11}}{2\mu(3\lambda + 2\mu)}$$

(dado que  $\sigma_{22} = 0$  y que  $\delta_{11} = \delta_{22} = 1$ )

Por tanto,

$$E = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda + \mu}, \quad \nu = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)} \quad (2.19)$$

### 2.3.1.2 Condiciones de compresión hidrostática



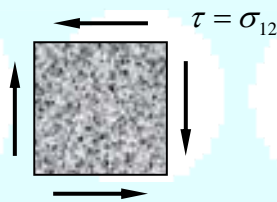
En estas condiciones,  $\sigma_{11} = \sigma_{22} = \sigma_{33} = p$ , y por tanto,  $\sigma_{kk} = 3p$ . Definimos **módulo volumétrico** (*bulk modulus*) como

$$K = \frac{p}{\varepsilon_{kk}} \quad (2.20)$$

Aplicando la ecuación (2.17),  $\varepsilon_{kk} = \frac{3p}{3\lambda + 2\mu}$ . Por tanto,

$$K = \frac{3\lambda + 2\mu}{3} \quad (2.21)$$

### 2.3.1.3 Condiciones de corte simple



En estas condiciones, la única componente no nula del tensor de tensiones es, por ejemplo,  $\sigma_{12}$  (tomemos un caso plano, 2-D).

Definimos el **módulo de corte**  $G$  como

$$G = \frac{\sigma_{12}}{\gamma_{12}} \quad (2.22)$$

donde  $\gamma_{12} = \gamma_{21} = \varepsilon_{12} + \varepsilon_{21} = 2\varepsilon_{12}$ . Aplicando (2.17),  $\sigma_{12} = 2\mu\varepsilon_{12} = \mu\gamma_{12}$  lo cual implica

$$G = \mu \quad (2.23)$$

### 2.3.1.4 Condiciones edométricas

Las condiciones edométricas o de confinamiento lateral (extensión o compresión) son condiciones de deformación uniaxial (es decir, con una única componente no nula del tensor de deformaciones:  $\varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0$ ,  $\varepsilon_{11} \neq 0$ )

En estas condiciones, definimos el **módulo confinado** (o módulo edométrico)  $M$  como:

$$M = \frac{\sigma_{11}}{\varepsilon_{11}} \quad \text{con } \varepsilon_{22} = \varepsilon_{33} = 0 \quad (2.24)$$

Aplicando (2.16),  $\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{11} + 2\mu\varepsilon_{11}$ , con lo cual

$$M = \lambda + 2\mu \quad (2.25)$$

### 2.3.2 Relaciones alternativas:

- En términos de  $E$  y  $\nu$

$$\sigma_{ij} = \frac{E}{1+\nu} \varepsilon_{ij} + \frac{\nu E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} \quad (2.26)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.27)$$

Las ecuaciones (2.27) se pueden escribir de forma cómoda mediante las conocidas relaciones

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E} [\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E} [\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\ \varepsilon_z &= \frac{1}{E} [\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)] \\ \gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G} \\ \gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G} \\ \gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G} \end{aligned} \quad (2.28)$$

- En términos de  $G$ ,  $K$  y  $\nu$

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij} + \frac{3\nu K}{(1+\nu)}\varepsilon_{kk}\delta_{ij} \quad (2.29)$$

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2G}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{3K(1-2\nu)}\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.30)$$

### 2.3.3 Propiedades de la ley isótropa

Como recordatorio de conceptos básicos de la mecánica del medio continuo, se incluye aquí la definición de componentes **esférica** y **desviadora** de un tensor. Dado un tensor  $\mathbf{T}$  definimos

- Componente esférica (media):  $T_m = \frac{1}{3}T_{kk}$ , donde  $T_{kk} = \sum_1^3 T_{kk}$  es la *traza* del tensor  $\mathbf{T}$ .
- Componente desviadora:  $T'_{ij} = T_{ij} - T_m\delta_{ij}$

#### Propiedad 1

*Los ejes principales de tensión y deformación coinciden*

Demostración: supongamos que hacemos coincidir los ejes principales de deformación con  $\{x,y,z\}$ , es decir,  $\varepsilon_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ :

$$\varepsilon_{11} = \varepsilon_1 = \varepsilon_x; \quad \varepsilon_{22} = \varepsilon_2 = \varepsilon_y; \quad \varepsilon_{33} = \varepsilon_3 = \varepsilon_z$$

$$\varepsilon_{vol} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3$$

Comprobemos:

$$\sigma_{11} = \lambda\varepsilon_{vol} + 2\mu\varepsilon_1 \neq 0$$

$$\sigma_{22} = \lambda\varepsilon_{vol} + 2\mu\varepsilon_2 \neq 0$$

$$\sigma_{33} = \lambda\varepsilon_{vol} + 2\mu\varepsilon_3 \neq 0$$

$$\sigma_{12} = \sigma_{21} = 0; \quad \sigma_{23} = \sigma_{32} = 0; \quad \sigma_{13} = \sigma_{31} = 0$$

es decir,  $\sigma_{ij} = 0$  si  $i \neq j$ , como se quería demostrar.

#### Propiedad 2

*Las componentes esférica y desviadora están desacopladas*

Demostración: partimos de la ecuación (2.16). La componente esférica (media) del tensor de tensiones es

$$p = \frac{1}{3} \sigma_{kk} = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{kk} = K \varepsilon_{kk} = K \varepsilon_{vol}, \text{ donde se ha usado la relación (2.21)}$$

Los tensores desviadores de tensión y deformación son

$$s_{ij} = \sigma_{ij} - \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = \sigma_{ij} - p \delta_{ij}$$

$$e_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{kk} \delta_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3} \varepsilon_{vol} \delta_{ij}$$

Substituyendo en (2.16),

$$s_{ij} + p \delta_{ij} = \lambda \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2\mu \left( e_{ij} + \frac{\varepsilon_{vol}}{3} \delta_{ij} \right) = \underbrace{\left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{vol} \delta_{ij}}_p + 2\mu e_{ij}$$

pero  $p = \left( \lambda + \frac{2}{3} \mu \right) \varepsilon_{vol}$  y por tanto  $s_{ij} = 2\mu e_{ij}$ . Finalmente,

$$\sigma_{ij} = s_{ij} + \frac{1}{3} \sigma_{kk} \delta_{ij} = K \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2\mu e_{ij}$$

En definitiva,

$$p = K \varepsilon_{vol} \quad \text{componentes esféricas} \quad (2.31)$$

$$s_{ij} = 2G e_{ij} \quad \text{componentes desviadoras} \quad (2.32)$$

### 2.3.4 Limitaciones a los parámetros de la ley

Las buscamos a partir del postulado de función definida positiva para el trabajo ( $W > 0$ ):

$$\begin{aligned} dW &= \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = (K \varepsilon_{vol} \delta_{ij} + 2G e_{ij}) d\varepsilon_{ij} \\ &= K \varepsilon_{vol} \delta_{ij} d\varepsilon_{ij} + 2G e_{ij} d\varepsilon_{ij} \\ &= K \varepsilon_{vol} \delta_{ij} \left( de_{ij} + \frac{1}{3} d\varepsilon_{vol} \delta_{ij} \right) + 2G e_{ij} \left( de_{ij} + \frac{1}{3} d\varepsilon_{vol} \delta_{ij} \right) \\ &= K \varepsilon_{vol} d\varepsilon_{vol} + 2G e_{ij} de_{ij} \end{aligned}$$

Suponiendo  $W_0 = 0$  en el estado inicial, e integrando,

$$W = \frac{1}{2} K \varepsilon_{vol}^2 + G e_{ij} e_{ij} > 0$$



Si  $\varepsilon_{vol}$  o  $e_{ij}$  pueden ser variados arbitrariamente, es necesario que se cumpla  $K > 0$  y  $G > 0$  o, lo que es lo mismo,

$$\frac{E}{3(1-2\nu)} > 0; \quad \frac{E}{2(1+\nu)} > 0$$

lo cual nos lleva a las conocidas restricciones

$$E > 0; \quad -1 < \nu < \frac{1}{2} \quad (2.33)$$

## 2.4 Forma matricial de las relaciones tensión–deformación

La representación del estado tenso–deformacional mediante tensores de segundo orden, conlleva la representación de la matriz de rigidez  $\mathbf{E}$  mediante un tensor de cuarto orden que es difícil de representar de forma escrita. Por este motivo, y dado que los tensores de tensiones y deformaciones son simétricos y tienen únicamente seis componentes distintos ambos, se suele optar (por ejemplo en análisis por el método de los elementos finitos) por representar ambos tensores en forma de vector con los siguientes convenios:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix}; \quad \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_z \end{bmatrix} \leftrightarrow \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ 2\varepsilon_{xy} \\ 2\varepsilon_{xz} \\ 2\varepsilon_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

De esta manera, el tensor de rigidez  $\mathbf{E}$  que aparece en las ecuaciones constitutivas (2.5) se expresa mediante una matriz de segundo orden de  $6 \times 6$  componentes:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \tau_{xy} \\ \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_{11} & E_{12} & E_{13} & E_{14} & E_{15} & E_{16} \\ E_{21} & E_{22} & E_{23} & E_{24} & E_{25} & E_{26} \\ E_{31} & E_{32} & E_{33} & E_{34} & E_{35} & E_{36} \\ E_{41} & E_{42} & E_{43} & E_{44} & E_{45} & E_{46} \\ E_{51} & E_{52} & E_{53} & E_{54} & E_{55} & E_{56} \\ E_{61} & E_{62} & E_{63} & E_{64} & E_{65} & E_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{xy} \\ \gamma_{xz} \\ \gamma_{yz} \end{bmatrix} \quad (2.35)$$

### 2.4.1 Caso general

En elasticidad general (con todas las componentes de los tensores de tensión y deformación no nulos, la matriz de rigidez elástica  $\mathbf{E}$  tiene la forma siguiente:

$$\mathbf{E} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \quad (2.36)$$

### 2.4.2 Tensión plana

En el caso de tensión plana, los tensores de tensiones y deformaciones tienen la siguiente forma:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & 0 \\ \tau_{yx} & \sigma_y & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \boldsymbol{\varepsilon} = \begin{bmatrix} \varepsilon_x & \varepsilon_{xy} & 0 \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_y & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_z \end{bmatrix} \quad (2.37)$$

Un ejemplo típico de tensión plana es el de una lámina con cargas únicamente contenidas en el plano de la lámina.

En este caso, las ecuaciones (2.28) conducen a:

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_x &= \frac{1}{E}(\sigma_x - \nu\sigma_y) \\ \varepsilon_y &= \frac{1}{E}(\sigma_y - \nu\sigma_x) \end{aligned} \right\} (1)$$

$$\varepsilon_z = -\frac{\nu}{E}(\sigma_x + \sigma_y)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G}$$

Resolviendo el sistema (1) y despejando las tensiones,

$$\sigma_x = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_x + \nu\varepsilon_y)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1-\nu^2}(\varepsilon_y + \nu\varepsilon_x)$$

Finalmente, las ecuaciones constitutivas elásticas en el caso de deformación plana se escriben de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.38)$$

### 2.4.3 Deformación plana

Un ejemplo típico de deformación plana es un túnel o una presa de tierras en que no existen cargas aplicadas en la dirección longitudinal de la estructura. Se deja como ejercicio para el lector el demostrar que en este caso la relación tensión–deformación se expresa de la siguiente manera:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_x \\ \varepsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{bmatrix} \quad (2.39)$$

### 2.4.4 Axisimetría

En coordenadas cilíndricas, los vectores de tensión y deformación vienen dados por las componentes  $(\sigma_r, \sigma_\theta, \sigma_z, \tau_{r\theta}, \tau_{rz}, \tau_{\theta z})^T$  y  $(\varepsilon_r, \varepsilon_\theta, \varepsilon_z, \gamma_{r\theta}, \gamma_{rz}, \gamma_{\theta z})^T$ . Su relación se expresa con la misma matriz de rigidez que en el caso general, ecuación (2.36). Por lo tanto, en condiciones axisimétricas, con  $\tau_{z\theta} = \tau_{\theta z} = \gamma_{z\theta} = \gamma_{\theta z} = 0$ , las ecuaciones constitutivas elásticas se expresan mediante

$$\begin{bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \sigma_\theta \\ \tau_{rz} \end{bmatrix} = \frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \varepsilon_\theta \\ \gamma_{rz} \end{bmatrix} \quad (2.40)$$

### 2.4.5 Material transversalmente anisótropo

Material transversalmente anisótropo es aquel que presenta un eje de simetría. Las propiedades del material en la dirección del eje de simetría son distintas de las propiedades del material en direcciones contenidas en planos perpendiculares a dicho eje. Pero **sobre** tales planos, las propiedades son independientes de la dirección (contenida en los planos). Las constantes elásticas, en este caso, son las que vienen dadas por las relaciones entre las distintas componentes de tensión y deformación. Supongamos que el eje de simetría es el eje vertical  $z$  (ver Figura 2-2). En este caso tenemos:

- Deformación normal en la dirección del eje  $z$  de simetría debido a tensión en la dirección del mismo eje  $z$ : módulo elástico  $E_V$ .
- Deformación normal en la dirección del eje  $z$  de simetría debido a tensión en una dirección contenida en un plano perpendicular al eje  $z$ : coeficiente de Poisson  $\nu_{HV}$ .
- Deformaciones normales en direcciones contenidas en un plano perpendicular al eje  $z$  debido a tensiones en direcciones contenidas también en el mismo plano: módulo elástico  $E_H$  y coeficiente de Poisson  $\nu_H$ .
- Deformaciones normales en direcciones contenidas en un plano perpendicular al eje  $z$  debido a tensión en la dirección del eje  $z$ : coeficiente de Poisson  $\nu_{VH}$ .
- Deformación de corte en planos que contengan el eje de simetría vertical  $z$ : módulo de corte  $G_V$ .

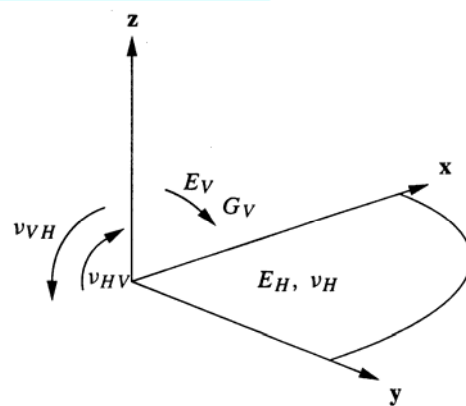


Figura 2-2

El número de constantes elásticas que aparecen son seis. Sin embargo, ya se vio que para este tipo de materiales el número de constantes independientes de la matriz de rigidez elástica son cinco. Ello se explica por el hecho de las seis constantes descritas anteriormente no son independientes, sino que existe una relación entre ellas:

$$\frac{\nu_{HV}}{\nu_{VH}} = \frac{E_H}{E_V} \quad (2.41)$$

con lo cual el número de constantes independientes se reduce efectivamente a cinco.

Así pues, las relaciones elásticas en este caso (equivalentes a las ecuaciones (2.28) para el caso isótropo) son las siguientes:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{\sigma_x}{E_H} - \nu_H \frac{\sigma_y}{E_H} - \nu_{VH} \frac{\sigma_z}{E_V} \\
\varepsilon_y &= -\nu_H \frac{\sigma_x}{E_H} + \frac{\sigma_y}{E_H} - \nu_{VH} \frac{\sigma_z}{E_V} \\
\varepsilon_z &= -\nu_{HV} \frac{\sigma_x}{E_H} - \nu_{HV} \frac{\sigma_y}{E_H} + \frac{\sigma_z}{E_V} \\
\gamma_{xy} &= \frac{\tau_{xy}}{G_H} = \frac{2(1+\nu_H)}{E_H} \tau_{xy} \\
\gamma_{xz} &= \frac{\tau_{xz}}{G_V} \\
\gamma_{yz} &= \frac{\tau_{yz}}{G_V}
\end{aligned} \tag{2.42}$$

La matriz de rigidez elástica, para un material que presenta anisotropía transversal, es la siguiente:

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A \left( \frac{E_H}{E_V} - \nu_{HV}^2 \right) & A \left( \frac{E_H}{E_V} \nu_H + \nu_{HV}^2 \right) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & 0 & 0 & 0 \\ A \left( \frac{E_H}{E_V} \nu_H + \nu_{HV}^2 \right) & A \left( \frac{E_H}{E_V} - \nu_{HV}^2 \right) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & 0 & 0 & 0 \\ A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & A (1 - \nu_H^2) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_V & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & G_V & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{E_H}{2(1 + \nu_H)} \end{bmatrix} \tag{2.43}$$

donde  $A = \frac{E_H}{(1 + \nu_H) \left[ \frac{E_H}{E_V} (1 - \nu_H) - 2\nu_{HV}^2 \right]}$

Para el caso de tensión plana, la matriz de rigidez elástica en este caso es

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} B \frac{E_H}{E_V} & B \nu_{HV} & 0 \\ B \nu_{HV} & B (1 - \nu_H^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_V \end{bmatrix} \tag{2.44}$$

$$\text{Donde } B = \frac{E_V}{1 - \frac{E_H}{E_V} \nu_{VH}^2}$$

Y para deformación plana

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A \left( \frac{E_H}{E_V} - \nu_{HV}^2 \right) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & 0 \\ A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & A(1 - \nu_H^2) & 0 \\ 0 & 0 & G_V \end{bmatrix} \quad (2.45)$$

Finalmente, para axisimetría,

$$\mathbf{E} = \begin{bmatrix} A \left( \frac{E_H}{E_V} - \nu_{HV}^2 \right) & A \left( \frac{E_H}{E_V} \nu_H + \nu_{HV}^2 \right) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & 0 \\ A \left( \frac{E_H}{E_V} \nu_H + \nu_{HV}^2 \right) & A \left( \frac{E_H}{E_V} - \nu_{HV}^2 \right) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & 0 \\ A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & A \nu_{HV} (1 + \nu_H) & A(1 - \nu_H^2) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_V \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

## 2.5 Relaciones entre las constantes elásticas

Para un medio isótropo caracterizado por dos constantes elásticas distintas, existen relaciones de dependencia entre las diversas constantes que se han introducido en este capítulo. Las relaciones entre las constantes más habituales  $E$ ,  $G$ ,  $K$ ,  $\nu$ ,  $\lambda$  y  $M$  vienen dadas en la siguiente tabla:

Tabla 2-1. Relación entre las constantes elásticas  $E, G, K, \nu, \lambda$  y  $M$ 

	Módulo de corte $G = \mu$	Módulo de Young $E$	Módulo confinado $M$	Módulo volumétrico $K$	Constante de Lamé $\lambda$	Coefficiente de Poisson $\nu$
$G, E$	$G$	$E$	$\frac{G(4G - E)}{3G - E}$	$\frac{GE}{9G - 3E}$	$\frac{G(E - 2G)}{3G - E}$	$\frac{E - 2G}{2G}$
$G, M$	$G$	$\frac{G(3M - 4G)}{M - G}$	$M$	$M - \frac{4}{3}G$	$M - 2G$	$\frac{M - 2G}{2(M - G)}$
$G, K$	$G$	$\frac{9GK}{3K + G}$	$K + \frac{4}{3}G$	$K$	$K - \frac{2}{3}G$	$\frac{3K - 2G}{2(3K + G)}$
$G, \lambda$	$G$	$\frac{G(3\lambda + 2G)}{\lambda + G}$	$\lambda + 2G$	$\lambda + \frac{2}{3}G$	$\lambda$	$\frac{\lambda}{2(\lambda + G)}$
$G, \nu$	$G$	$2G(1 + \nu)$	$\frac{2G(1 - \nu)}{1 - 2\nu}$	$\frac{2G(1 + \nu)}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{2G\nu}{1 - 2\nu}$	$\nu$
$E, K$	$\frac{3KE}{9K - E}$	$E$	$\frac{K(9K + 3E)}{9K - E}$	$K$	$\frac{K(9K - E)}{9K - E}$	$\frac{3K - E}{6K}$
$E, \nu$	$\frac{E}{2(1 + \nu)}$	$E$	$\frac{E(1 - \nu)}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\frac{E}{3(1 - 2\nu)}$	$\frac{\nu E}{(1 + \nu)(1 - 2\nu)}$	$\nu$
$K, \lambda$	$\frac{3(K - \lambda)}{2}$	$\frac{9K(K - \lambda)}{3K - \lambda}$	$3K - 2\lambda$	$K$	$\lambda$	$\frac{\lambda}{3K - \lambda}$
$K, M$	$\frac{3(M - K)}{4}$	$\frac{9K(M - K)}{3K + M}$	$M$	$K$	$\frac{3K - M}{2}$	$\frac{3K(2M - 1) + M}{3K(2M + 1) - M}$
$K, \nu$	$\frac{3K(1 - 2\nu)}{2(1 + \nu)}$	$3K(1 - 2\nu)$	$\frac{3K(1 - \nu)}{1 + \nu}$	$K$	$\frac{3K\nu}{1 + \nu}$	$\nu$

## 2.6 Elasticidad no lineal

En este apartado estudiaremos leyes elásticas no lineales que son aquellas en las cuales, aún no habiendo deformaciones permanentes, no existe proporcionalidad entre tensión y deformación. En elasticidad no lineal, el tensor de rigidez elástico ya no es una matriz de coeficientes constantes, sino que estos coeficientes dependen de las tensiones y/o de las deformaciones.

### 2.6.1 Introducción y conceptos básicos.

#### 2.6.1.1 Principio de los desplazamientos virtuales

Únicamente enunciaremos este principio (también conocido como *principio de los trabajos virtuales*), que se utilizará de forma habitual a continuación. Este principio es una manera alternativa de expresar las condiciones de equilibrio tanto en un cuerpo rígido como en un medio deformable.

Cuando sobre un cuerpo deformable de volumen  $V$  y contorno exterior  $S$  se prescriben una serie de acciones externas (tanto másicas como de superficie), una distribución de tensiones *estáticamente admisible* es aquella que satisface las ecuaciones diferenciales de equilibrio, Eqs. (2.2), en el volumen  $V$ , y las condiciones de contorno, Eqs. (2.4) en la parte del contorno  $S$  donde hay prescritas acciones de superficie  $\mathbf{T}$ . Es importante recordar que la distribución de tensiones en equilibrio que se propone en relación a este principio no tiene porque ser la distribución de tensiones real en el cuerpo deformado. Incluso cuando todas las condiciones de contorno se expresan en términos de tensiones, la distribución de tensiones no está determinada completamente por las condiciones de equilibrio (2.2) y las de contorno (2.4), sino que depende en general de las propiedades del material, Eqs. (2.5). Normalmente existen muchas distribuciones de tensiones estáticamente admisibles, todas satisfaciendo equilibrio. Cualquiera de ellas puede ser la distribución a que hace referencia el principio de los desplazamientos virtuales.

Una distribución de desplazamientos es *cinemáticamente admisible* si satisface los desplazamientos impuestos en aquella parte del contorno  $S$  donde estén prescritos, y tal que sus primeras derivadas parciales en el volumen  $V$  sean continuas. Dado que los desplazamientos virtuales tienen que considerarse como desplazamientos *adicionales* a partir de la configuración de equilibrio, una componente de desplazamiento virtual tiene que ser nula cuando el desplazamiento real viene impuesto por las condiciones de contorno.

Supongamos que un cuerpo deformable está en una configuración de equilibrio y que a cada punto del cuerpo se le aplica un desplazamiento virtual infinitesimal  $\delta u_i$  a partir de la configuración de equilibrio. Cada componente del desplazamiento virtual es una función del vector de posición en el interior del cuerpo. Suponemos que las tres funciones  $\delta u_i$  tienen primeras derivadas parciales continuas con respecto a  $x_1, x_2,$  y  $x_3$ , y que  $\delta u_i = 0$  en aquella parte del contorno  $S$  donde los desplazamientos reales  $u_i$  están prescritos. Los desplazamientos se denominan virtuales debido a que no son desplazamientos reales en sentido físico, producidos por las cargas aplicadas, sino únicamente desplazamientos hipotéticos, cinemáticamente admisibles.

Con estas premisas, el principio de los desplazamientos virtuales expresa que dado un sistema de tensiones, fuerzas másicas y fuerzas de superficie  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}, \mathbf{T}\}$  estáticamente admisible y un sistema de desplazamientos virtuales (y deformaciones virtuales asociadas)  $\{\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}\}$  cinemáticamente admisibles, el trabajo de las fuerzas internas (tensiones) es igual al trabajo de las fuerzas externas (másicas y de superficie):

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S T_i \delta u_i dS + \int_V b_i \delta u_i dV \quad (2.47)$$

Se puede demostrar que también son ciertas las siguientes formas del principio:

$$\int_V \delta \boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S \delta T_i u_i dS + \int_V \delta b_i u_i dV \quad (2.48)$$

$$\int_V \boldsymbol{\sigma}_{ij} \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S T_i u_i dS + \int_V b_i u_i dV \quad (2.49)$$

$$\int_V \delta \boldsymbol{\sigma}_{ij} \delta \boldsymbol{\varepsilon}_{ij} dV = \int_S \delta T_i \delta u_i dS + \int_V \delta b_i \delta u_i dV \quad (2.50)$$



### 2.6.1.2 Energía de deformación y energía complementaria

Partiendo de un estado en equilibrio  $\{\boldsymbol{\sigma}, \mathbf{b}, \mathbf{T}\}$  e imponiendo unos desplazamientos virtuales  $\{\delta \mathbf{u}, \delta \boldsymbol{\varepsilon}\}$  cinemáticamente admisibles, el término de la izquierda de la Eq. (2.47) representa el trabajo de las fuerzas internas debido a los desplazamientos impuestos. Este trabajo se denomina energía de deformación:

$$\text{Energía de deformación: } \delta W = \sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} \quad (2.51)$$

Imponiendo ahora unos incrementos de tensión estáticamente admisibles, el término de la izquierda de la Eq. (2.48) representa el trabajo de las fuerzas internas debido a los incrementos de tensión impuestos. Este trabajo se denomina energía complementaria:

$$\text{Energía complementaria: } \delta \Omega = \varepsilon_{ij} \delta \sigma_{ij} \quad (2.52)$$

La energía de deformación  $W(\boldsymbol{\varepsilon})$  y la energía complementaria  $\Omega(\boldsymbol{\sigma})$  son potenciales de los cuales se derivan las tensiones y las deformaciones, respectivamente:

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}}; \quad \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} \quad (2.53)$$

#### Ejemplo en una dimensión

Consideremos el caso unidimensional donde las únicas componentes no nulas de los tensores de tensiones y deformaciones son  $\sigma_{11}$  y  $\varepsilon_{11}$ , que llamaremos para simplificar  $\sigma$  y  $\varepsilon$  respectivamente. En este caso, la ley constitutiva elástica se expresa mediante la relación  $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ . Si calculamos la energía de deformación y la energía complementaria de acuerdo con las expresiones (2.51) y (2.52), obtenemos

$$W(\varepsilon) = \int_0^\varepsilon \sigma d\varepsilon = \text{área entre la curva } \sigma = \sigma(\varepsilon) \text{ y el eje de abscisas} \quad (2.54)$$

$$\Omega(\sigma) = \int_0^\sigma \varepsilon d\sigma = \text{área entre la curva } \sigma = \sigma(\varepsilon) \text{ y el eje de ordenadas} \quad (2.55)$$

Obviamente,  $\sigma \cdot \varepsilon = W + \Omega$ . Este resultado es generalizable al caso general,  $\sigma_{ij} \varepsilon_{ij} = W + \Omega$ .

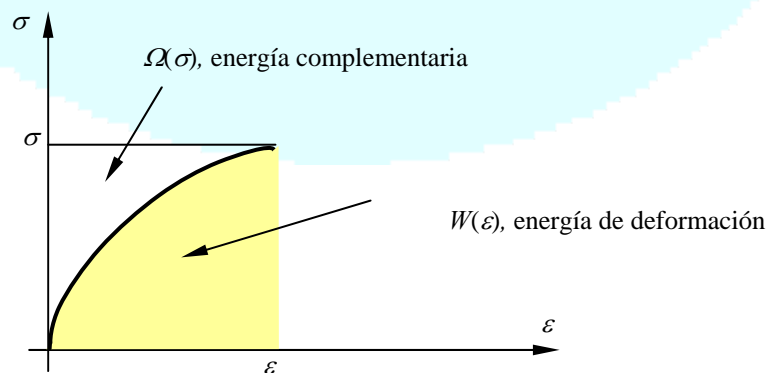


Figura 2-3. Energía de deformación y energía complementaria

## 2.6.2 Formulación de leyes elásticas no lineales

La formulación puede realizarse de dos maneras:

- Formular  $W$  y/o  $\Omega$  como funciones de las deformaciones o tensiones respectivamente (o de sus invariantes)
- Generalizar las ecuaciones constitutivas elásticas lineales.

### 2.6.2.1 Elasticidad no lineal isótropa basada en las funciones $W$ y $\Omega$ .

Hemos visto anteriormente que la energía de deformación y la energía complementaria son función de las componentes de los tensores de deformaciones y de tensiones respectivamente,  $W = W(\boldsymbol{\varepsilon})$ ,  $\Omega = \Omega(\boldsymbol{\sigma})$ . De estos potenciales se derivan las tensiones y deformaciones, respectivamente, tal como se observa en las Eqs. (2.53). En la práctica, las funciones  $W$  y  $\Omega$  se expresan como **funciones de los invariantes** del tensor de deformaciones y de los invariantes del tensor de tensiones, respectivamente, en lugar de hacerlo como funciones de las componentes de los tensores correspondientes. Así, si se trabaja con la energía de deformación  $W$ , tendríamos por ejemplo una expresión del tipo

$$W = W(I_1^\varepsilon, J_2^\varepsilon, J_3^\varepsilon) \quad (2.56)$$

La función expresada por la Eq. (2.56) es tan sólo un ejemplo: el número y tipo de invariantes que aparece en ella puede ser distinto del mostrado.

Una vez propuesta una forma concreta para  $W$  (función de los invariantes), las tensiones se obtienen aplicando la regla de la cadena a la primera Eq. (2.53):

$$\sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \frac{\partial W}{\partial I_1^\varepsilon} \frac{\partial I_1^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_2^\varepsilon} \frac{\partial J_2^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} + \frac{\partial W}{\partial J_3^\varepsilon} \frac{\partial J_3^\varepsilon}{\partial \varepsilon_{ij}} \quad (2.57)$$

Para materiales elásticos lineales, es fácil obtener la expresión de los potenciales  $W$  y  $\Omega$ . Para ello basta recordar que las leyes constitutivas se expresan, de forma general, de la siguiente manera:

$$\sigma_{ij} = E_{ijkl} \varepsilon_{kl}; \quad \varepsilon_{ij} = C_{ijkl} \sigma_{kl}$$

donde  $\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}$ . Por lo tanto, las energías de deformación y complementaria serán

$$W(\boldsymbol{\varepsilon}) = \int_0^\varepsilon \boldsymbol{\sigma} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \int_0^\varepsilon E_{ijkl} \varepsilon_{kl} d\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} E_{ijkl} \varepsilon_{ij} \varepsilon_{kl}$$

$$\Omega(\boldsymbol{\sigma}) = \int_0^\sigma \boldsymbol{\varepsilon} : d\boldsymbol{\sigma} = \int_0^\sigma C_{ijkl} \sigma_{kl} d\sigma_{ij} = \frac{1}{2} C_{ijkl} \sigma_{ij} \sigma_{kl}$$

Para un material isótropo, utilizando las expresiones (2.26), (2.27) y (2.28), resulta

$$\begin{aligned}
 W(\boldsymbol{\varepsilon}) &= \frac{E}{2(1+\nu)} \left[ \frac{\nu}{1-2\nu} \varepsilon_{kk}^2 + 2\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij} \right] \\
 \Omega(\boldsymbol{\sigma}) &= \frac{1+\nu}{2E} \sigma_{ij}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{2E} \sigma_{kk}^2
 \end{aligned}
 \tag{2.58}$$

### Ejemplo 1

Se propone una forma concreta para  $W$  o  $\Omega$ , que contendrá unas ciertas constantes. Estas constantes (parámetros del modelos) se buscan particularizando para un cierto ensayo o condiciones de contorno concretas del que se posean datos experimentales.

En este ejemplo trabajamos con la energía complementaria  $\Omega$  (deformaciones en función de tensiones), y suponemos que

$$\Omega(I_1, J_2) = aJ_2 + bI_1J_2$$

donde los invariantes  $I_1$  y  $J_2$  son los definidos en las ecuaciones (2.6) y (2.7).

Supongamos también que un ensayo de tracción simple proporciona la siguiente relación entre deformación y tensión (uniaxial):

$$\varepsilon = \sigma + 0.1\sigma^2$$

Se trata ahora de encontrar los parámetros  $a$  y  $b$ . Para ello partimos de la expresión de las deformaciones derivadas del potencial  $\Omega$ :

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial \Omega}{\partial I_1} \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}$$

Calculemos ahora las derivadas parciales de los invariantes con relación a las tensiones:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial I_1}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \sigma_{kk}}{\partial \sigma_{ij}} = \delta_{ij} \\
 \frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}} &= \frac{\partial \left( \frac{1}{2} s_{pq} s_{pq} \right)}{\partial \sigma_{ij}} = s_{pq} \frac{\partial s_{pq}}{\partial \sigma_{ij}} = s_{pq} \frac{\partial (\sigma_{pq} - p \delta_{pq})}{\partial \sigma_{ij}} = s_{pq} \left[ \frac{\partial \sigma_{pq}}{\partial \sigma_{ij}} - \frac{\partial}{\partial \sigma_{ij}} \left( \frac{\sigma_{kk}}{3} \right) \delta_{pq} \right] \\
 &= s_{pq} (\delta_{ip} \delta_{jq} - \frac{1}{3} \delta_{ij} \delta_{pq}) = s_{ij} - 0 = s_{ij}
 \end{aligned}$$

Por tanto,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial I_1} \delta_{ij} + \frac{\partial \Omega}{\partial J_2} s_{ij} = (bJ_2) \delta_{ij} + (a + bI_1) s_{ij}$$

Particularicemos ahora para el caso unidimensional:

$$p = \frac{\sigma}{3} \quad \begin{aligned} s_{11} &= \sigma - \frac{\sigma}{3} \\ s_{22} &= -\frac{\sigma}{3} \\ s_{33} &= -\frac{\sigma}{3} \end{aligned} \quad I_1 = \sigma \quad J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{\sigma^2}{3}$$

con lo cual, substituyendo en la expresión anterior de las deformaciones, obtenemos

$$\varepsilon = b \frac{\sigma^2}{3} + (a + b\sigma) \frac{2\sigma}{3} = b\sigma^2 + \frac{2a}{3} \sigma$$

e igualando con la expresión obtenida experimentalmente, obtenemos  $a = 3/2$ ,  $b = 0.1$  y finalmente, la ley constitutiva general resulta

$$\varepsilon_{ij} = 0.1 J_2 \delta_{ij} + \left( \frac{3}{2} + 0.1 I_1 \right) s_{ij}$$

### Ejemplo 2

En este ejemplo generalizamos el comportamiento unidimensional, con el siguiente procedimiento:

- 1) Proponer u obtener una ley constitutiva simple en una (o dos) dimensión(es).
- 2) Calcular las funciones de energía de deformación  $W$  o complementaria  $\Omega$
- 3) Generalizar el aspecto de  $W$  o  $\Omega$  substituyendo la tensión por una tensión equivalente y la deformación por una deformación equivalente, función de las tensiones y de las deformaciones respectivamente (o de sus invariantes respectivos si queremos leyes isótropas)
- 4) Hacer compatibles las nuevas leyes obtenidas a partir de  $W$  o  $\Omega$  mediante las Eqs. (2.53), con las leyes simples (unidimensionales) propuestas, y deducir de aquí las formas explícitas de  $W$  o  $\Omega$ .

Consideremos en este ejemplo una ley unidimensional exponencial del tipo

$$\varepsilon = C \sigma^n \quad \text{con} \quad 0 \leq n \leq \infty$$

Si  $\varepsilon_0 = C \sigma_0^n$ , tenemos que  $\left[ \frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right] = \left[ \frac{\sigma}{\sigma_0} \right]^n$ .

Para simplificar, trabajaremos con una ley  $\varepsilon = C \sigma^n$  recordando su carácter adimensional.

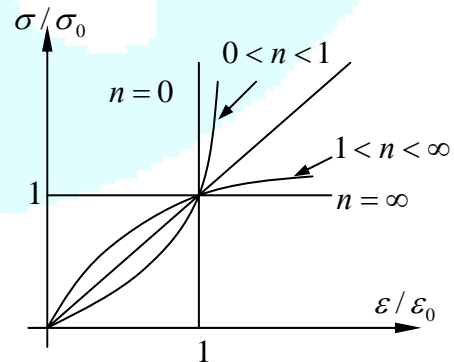


Figura 2-4

Calculemos  $W$  y  $\Omega$ :

$$W = \int \sigma d\varepsilon = \int \varepsilon^{1/n} d\varepsilon = \frac{n}{n+1} \varepsilon^{\frac{n+1}{n}}$$

$$\Omega = \int \varepsilon d\sigma = \int \sigma^n d\sigma = \frac{1}{n+1} \sigma^{n+1}$$

Generalizamos  $\sigma \rightarrow \Phi(\sigma_{ij})$ ;  $\varepsilon \rightarrow \Psi(\varepsilon_{ij})$ :

$$W = \frac{n}{n+1} [\Psi(\varepsilon_{ij})]^{n+1} \Rightarrow \sigma_{ij} = \frac{\partial W}{\partial \varepsilon_{ij}} = \Psi^{1/n} \frac{\partial \Psi}{\partial \varepsilon_{ij}}$$

$$\Omega = \frac{1}{n+1} [\Phi(\sigma_{ij})]^{n+1} \Rightarrow \varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}}$$

Proponemos, por ejemplo, la siguiente función:  $\Phi = \Phi(J_2)$ . Recordemos que  $J_2$  es el segundo invariante del tensor desviador de tensiones y representa una medida global del estado de corte que, salvo una constante, es igual a  $\tau_{oct}$ .

$$\varepsilon_{ij} = \Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial \sigma_{ij}} = \Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} \underbrace{\frac{\partial J_2}{\partial \sigma_{ij}}}_{s_{ij}} = \Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} s_{ij}$$

Particularizando esta ley general al caso unidimensional y comparando con la ley unidimensional anterior,

$$\left. \begin{array}{l} \varepsilon = \Phi^n \frac{d\Phi}{dJ_2} \frac{2\sigma}{3} \\ \varepsilon = \sigma^n \end{array} \right\} \Rightarrow \sigma^n = \Phi^n \frac{d\Phi}{dJ_2} \frac{2\sigma}{3}$$

Como  $J_2 = \frac{\sigma^2}{3} \Rightarrow \sigma = (3J_2)^{1/2}$ . Substituyendo en la expresión anterior resulta la ecuación diferencial

$$\frac{d}{dJ_2} \Phi^{n+1} = \frac{3(n+1)}{2} 3^{\frac{n-1}{2}} (J_2)^{\frac{n-1}{2}} \Rightarrow \Phi = (3J_2)^{1/2}$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon_{ij} = \Phi^n \frac{\partial \Phi}{\partial J_2} s_{ij} = (3J_2)^{n/2} \cdot \frac{1}{2} (3J_2)^{-1/2} 3s_{ij} = \frac{3}{2} (3J_2)^{\frac{n-1}{2}} s_{ij}$$

Y la energía complementaria resulta ser

$$\Omega = \frac{1}{n+1} [\Phi(\sigma_{ij})]^{n+1} = \frac{1}{n+1} (3J_2)^{\frac{n+1}{2}}$$

Supongamos que ahora hacemos válida la ley constitutiva hallada para casos bidimensionales, tales que el tensor de tensiones sea

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma & \tau & 0 \\ \tau & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{Tensión plana}$$

En este caso, el segundo invariante del desviador de tensiones resulta ser

$$\left. \begin{array}{l} s_{11} = \sigma - \frac{\sigma}{3} = \frac{2\sigma}{3} \\ s_{22} = s_{33} = -\frac{\sigma}{3} \\ s_{12} = s_{21} = \tau \\ \text{otros } s_{ij} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow J_2 = \frac{1}{2} s_{ij} s_{ij} = \frac{1}{3} \sigma^2 + \tau^2$$

Por lo tanto,

$$\Omega = \frac{1}{n+1} (\sigma^2 + 3\tau^2)^{\frac{n+1}{2}}$$

En este caso, las curvas  $\Omega = \text{cte.}$  son elipses  $\sigma^2 + 3\tau^2 = \text{cte.}$  en el plano  $\{\sigma, \tau\}$ . En este caso, la condición expresada por la segunda Eq. (2.53) representa la condición de normalidad entre las componentes de deformación asociada a cualquier incremento de tensiones  $AB$ .

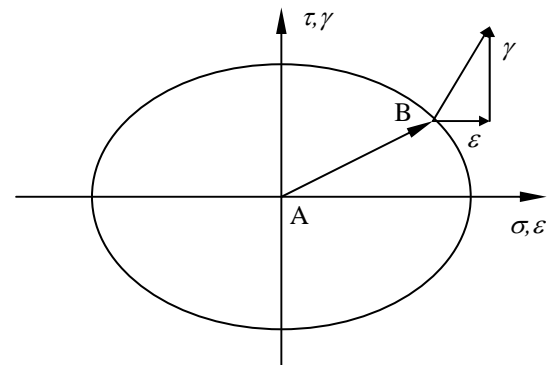


Figura 2-5

### 2.6.2.2 Elasticidad no lineal isótropa basada en la modificación de las leyes lineales

Recordemos que

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1+\nu}{E} \sigma_{ij} - \frac{\nu}{E} \sigma_{kk} \delta_{ij} \quad (2.59)$$

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G} = \frac{1+\nu}{E} s_{ij} \quad (2.60)$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{p}{K} = \frac{\sigma_{kk}}{3K} = \frac{1-2\nu}{E} \sigma_{kk} \quad (2.61)$$

Proponemos substituir en las Eqs. (2.59), (2.60) y (2.61) el término  $1/E$  por una función de los invariantes del tensor de tensiones (o del desviador de tensiones):

$$\frac{1}{E} = F(I_1, J_2, J_3) \quad (2.62)$$

Entonces, las ecuaciones anteriores se convierten en

$$\varepsilon_{ij} = (1 + \nu)F(I_1, J_2, J_3)\sigma_{ij} - \nu F(I_1, J_2, J_3)\sigma_{kk}\delta_{ij} \quad (2.63)$$

$$e_{ij} = (1 + \nu)F(I_1, J_2, J_3)s_{ij} \quad (2.64)$$

$$\varepsilon_{kk} = (1 - 2\nu)F(I_1, J_2, J_3)\sigma_{kk} \quad (2.65)$$

Una primera consecuencia de esta modificación es que las componentes volumétricas y desviadoras ya no están desacopladas.

Otra posibilidad es proponer en las ecuaciones (2.60) y (2.61) módulos secantes variables con la tensión o la deformación. Por ejemplo,

$$e_{ij} = \frac{s_{ij}}{2G_s} \quad (2.66)$$

$$\varepsilon_{kk} = \frac{p}{K_s} \quad (2.67)$$

Donde  $G_s$  y  $K_s$  deberán ser obtenidos a partir de datos experimentales.

Nótese que si se eligen unas funciones  $F$  (o módulos secantes  $G_s$  y  $K_s$ ) arbitrarios, se está construyendo en general leyes constitutivas elásticas tipo Cauchy, que pueden violar el principio termodinámico de no almacenar o generar energía en un ciclo cerrado de aplicación de tensiones o deformaciones. Para evitarlo, calculemos la energía de deformación  $W$  y obliguemos a que no dependa de la trayectoria.

$$\begin{aligned} W &= \int_0^\varepsilon \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij} = \int_0^\varepsilon (s_{ij} + p\delta_{ij}) \left( de_{ij} + \frac{d\varepsilon_{kk}}{3}\delta_{ij} \right) = \\ &= \int_0^\varepsilon \left( s_{ij} de_{ij} + \underbrace{s_{ij} \frac{d\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij}}_{=0} + \underbrace{p\delta_{ij} de_{ij}}_{=0} + p\delta_{ij} \frac{d\varepsilon_{kk}}{3} \delta_{ij} \right) = \int_0^\varepsilon (s_{ij} de_{ij} + p d\varepsilon_{kk}) \end{aligned}$$

Pero:  $I_1^\varepsilon = \varepsilon_{kk} \Rightarrow d\varepsilon_{kk} = dI_1^\varepsilon$  y  $J_2^\varepsilon = \frac{1}{2}e_{ij}e_{ij} \Rightarrow e_{ij}de_{ij} = dJ_2^\varepsilon$ . Substituyendo en la expresión anterior, junto con las relaciones (2.66) y (2.67), obtenemos:

$$W = \int_0^\varepsilon (2G_s e_{ij} de_{ij} + K_s \varepsilon_{kk} d\varepsilon_{kk}) = \int_0^{J_2^\varepsilon} 2G_s dJ_2^\varepsilon + \int_0^{I_1^\varepsilon} K_s I_1^\varepsilon dI_1^\varepsilon$$

Para que  $W$  no dependa de la trayectoria, una posibilidad es elegir

$$G_s = G_s(J_2^\varepsilon) = G_s(\gamma_{oct})$$

$$K_s = K_s(I_1^\varepsilon) = K_s(\varepsilon_{oct})$$

o, si trabajamos en tensiones,

$$G_s = G_s(J_2) = G_s(\tau_{oct})$$

$$K_s = K_s(I_1) = K_s(\sigma_{oct})$$

donde

$$\gamma_{oct} = \sqrt{\frac{8J_2^\varepsilon}{3}}; \quad \varepsilon_{oct} = \frac{I_1^\varepsilon}{3}; \quad \tau_{oct} = \sqrt{\frac{2J_2}{3}}; \quad \sigma_{oct} = \frac{I_1}{3}$$

## 2.7 Relaciones incrementales en elasticidad

### 2.7.1 Por diferenciación de relaciones del tipo $\varepsilon = f(\sigma)$

Como ejemplo, se va a obtener una ecuación constitutiva hiperelástica incremental de segundo orden, en la forma más general. Para ello formulemos la energía complementaria  $\Omega$  como polinomio de tercer orden en los invariantes

$$\bar{J}_1 = \sigma_{kk}; \quad \bar{J}_2 = \frac{1}{2} \sigma_{km} \sigma_{km}; \quad \bar{J}_3 = \frac{1}{3} \sigma_{km} \sigma_{mn} \sigma_{nk}$$

Entonces, si  $\Omega = \Omega(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3)$  es un polinomio de tercer orden, las deformaciones tendrán la siguiente forma general:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = \Phi_1 \delta_{ij} + \Phi_2 \sigma_{ij} + \Phi_3 \sigma_{ik} \sigma_{kj} \quad (2.68)$$

Proponemos la siguiente forma para  $\Omega = \Omega(\bar{J}_1, \bar{J}_2, \bar{J}_3)$ :

$$\Omega = A_0 \delta_{ij} + A_1 \bar{J}_1 + \frac{1}{2} B_1 \bar{J}_1^2 + \frac{1}{3} B_2 \bar{J}_1^3 + B_3 \bar{J}_1 \bar{J}_2 + B_4 \bar{J}_2 + B_5 \bar{J}_3$$

Diferenciando,

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Omega}{\partial \sigma_{ij}} = [A_1 + B_1 \bar{J}_1 + B_2 \bar{J}_1^2 + B_3 \bar{J}_2] \delta_{ij} + [B_3 \bar{J}_1 + B_4] \sigma_{ij} + B_5 \sigma_{ik} \sigma_{kj}$$

Luego



$$\begin{aligned}\Phi_1 &= A_1 + B_1 \bar{J}_1 + B_2 \bar{J}_1^2 + B_3 \bar{J}_2 \\ \Phi_2 &= B_3 \bar{J}_1 + B_4 \\ \Phi_3 &= B_5\end{aligned}$$

La relación incremental la obtendremos ahora diferenciando la Eq. (2.68):

$$\varepsilon_{ij} = \frac{\partial \Phi_1}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} \delta_{ij} + \Phi_2 \frac{\partial \sigma_{ij}}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \sigma_{ij} \frac{\partial \Phi_2}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \Phi_3 \frac{\partial (\sigma_{ik} \sigma_{kj})}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl} + \sigma_{ik} \sigma_{kj} \frac{\partial \Phi_3}{\partial \sigma_{kl}} \dot{\sigma}_{kl}$$

de donde obtenemos la relación incremental

$$\dot{\varepsilon}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{tan}} \dot{\sigma}_{kl} \quad (2.69)$$

Siendo  $C^{\text{tan}}$  la matriz de flexibilidad (*compliance*) tangencial. Se deja como ejercicio para el lector la obtención de los términos de esta matriz.

## 2.7.2 Por modificación de la formulación lineal isótropa

Se modifica la ley elástica, Eq. (2.26), de la siguiente manera:

$$\dot{\sigma}_{ij} = \frac{E_t}{1 + \nu_t} \dot{\varepsilon}_{ij} + \frac{\nu_t E_t}{(1 + \nu_t)(1 - 2\nu_t)} \dot{\varepsilon}_{kk} \delta_{ij} \quad (2.70)$$

Los módulos tangentes  $E_t$  y  $\nu_t$  deben ser derivados a partir de alguna formulación empírica. Por ejemplo, en Mecánica del Suelo, en ensayos triaxiales, es común la siguiente ley elástica no lineal unidimensional de tipo hiperbólico:

$$\sigma_1 - \sigma_3 = \frac{\varepsilon}{a + b\varepsilon}$$

Entonces,  $E_t = \frac{d(\sigma_1 - \sigma_3)}{d\varepsilon} = \frac{a}{(a + b\varepsilon)^2} \rightarrow E_0 = E_t|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{a} \Rightarrow a = \frac{1}{E_0}$

Y si  $\varepsilon \rightarrow \infty \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_3) = (\sigma_1 - \sigma_3)_\infty = \frac{1}{b} \Rightarrow b = \frac{1}{(\sigma_1 - \sigma_3)_\infty}$

Por tanto,

$$E_t = \frac{1/E_0}{[1/E_0 + \varepsilon/(\sigma_1 - \sigma_3)_\infty]^2}$$

De manera parecida podríamos obtener  $\nu_t$ .

## 2.7.3 Por formulación hipoelástica general.

Son relaciones del tipo

$$\dot{\sigma}_{ij} = C_{ijkl}^{\text{tan}} \dot{\epsilon}_{kl} \quad \leftrightarrow \quad \dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{tan}} : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

donde el tensor tangencial  $\mathbf{C}^{\text{tan}}$  depende en general del estado de tensiones o deformaciones. Se pueden proponer diversas formas:

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{tan}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\sigma}} = \mathbf{C}^{\text{tan}}(\boldsymbol{\epsilon}) : \dot{\boldsymbol{\epsilon}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E}^{\text{tan}}(\boldsymbol{\epsilon}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

$$\dot{\boldsymbol{\epsilon}} = \mathbf{E}^{\text{tan}}(\boldsymbol{\sigma}) : \dot{\boldsymbol{\sigma}}$$

La forma más general de  $\mathbf{C}^{\text{tan}}(\boldsymbol{\sigma})$  para un material hipoelástico de grado 1 es:

$$C_{ijkl}^{\text{tan}} = (a_{01} + a_{11}\sigma_{rr})\delta_{ij}\delta_{kl} + \frac{1}{2}(a_{02} + a_{12}\sigma_{rr})(\delta_{ik}\delta_{jl} + \delta_{jk}\delta_{il}) + a_{13}\sigma_{ij}\delta_{kl} + \\ + \frac{1}{2}a_{14}(\sigma_{jk}\delta_{li} + \sigma_{jl}\delta_{ki} + \sigma_{ik}\delta_{lj} + \sigma_{il}\delta_{kj}) + a_{15}\sigma_{kl}\delta_{ij}$$

y finalmente

$$\dot{\sigma}_{ij} = a_{01}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + a_{02}\dot{\epsilon}_{ij} + a_{11}\sigma_{rr}\dot{\epsilon}_{kk}\delta_{ij} + a_{12}\sigma_{rr}\dot{\epsilon}_{ij} + a_{13}\sigma_{ij}\dot{\epsilon}_{kk} + a_{14}(\sigma_{jk}\dot{\epsilon}_{ik} + \sigma_{ik}\dot{\epsilon}_{jk}) + a_{15}\sigma_{kl}\dot{\epsilon}_{kl}\delta_{ij}$$

## 3 Plasticidad

### 3.1 Introducción

La ley constitutiva elástica estudiada en el Capítulo 2 presenta las siguientes características:

- Todas las deformaciones son **recuperables**: una vez retirada la carga que ocasionó una deformación, ésta desaparece por completo y el cuerpo regresa a su estado original.
- Las componentes desviadora y esférica están **desacopladas**: campos de tensiones de tipo esférico únicamente producen cambios de volumen (pero no distorsiones), mientras que campos de tensiones de tipo desviador puro (con componente esférica nula) producen únicamente distorsiones (pero no cambios de volumen).
- No hay **rotura**: las tensiones pueden aumentar de manera indefinida sin que las propiedades del material cambien, ni que el cuerpo llegue a un estado último de rotura.

Estas tres características no se cumplen, en general, para materiales reales: las deformaciones son, al menos en parte, permanentes; en muchos casos existe acoplamiento entre las componentes esférica y desviadora (dilatancia); y las tensiones no pueden aumentar de manera indefinida sin que el material llegue a un estado límite de agotamiento y se produzca la rotura u otros cambios de comportamiento.

Por todo ello, parece razonable plantearse la necesidad de otros tipo de ecuaciones constitutivas (como la *plasticidad*) que nos permitan

- determinar de forma directa los estados últimos y de rotura
- modelar deformaciones no recuperables
- modelar cambios de comportamiento
- modelar, con rigor, materiales frágiles o reblandecibles

El estudio de la plasticidad que se presenta en este Capítulo se considerará independiente del tiempo.

La teoría de la plasticidad fue desarrollada a partir de 1930 inicialmente para metales, aunque puede ser aplicada a otros tipos de materiales. Como ejemplo ilustrativo de los fenómenos que la plasticidad tiene que poder reproducir, estudiemos el caso de una barra de metal sometida a tracción pura. Este es un caso unidimensional, fácilmente interpretable, y queda reflejado en la Figura 3-1 en la que observamos las siguientes características:

- Un comportamiento próximo al elástico lineal hasta que la tensión aplicada alcanza un cierto valor  $\sigma_Y$  (que llamamos límite de fluencia). Una vez alcanzado este valor, se produce un **cambio de comportamiento**, por el cual las deformaciones crecen mucho más rápido, mientras que la tensión se mantiene sensiblemente constante o varía muy poco: el material “fluye.”

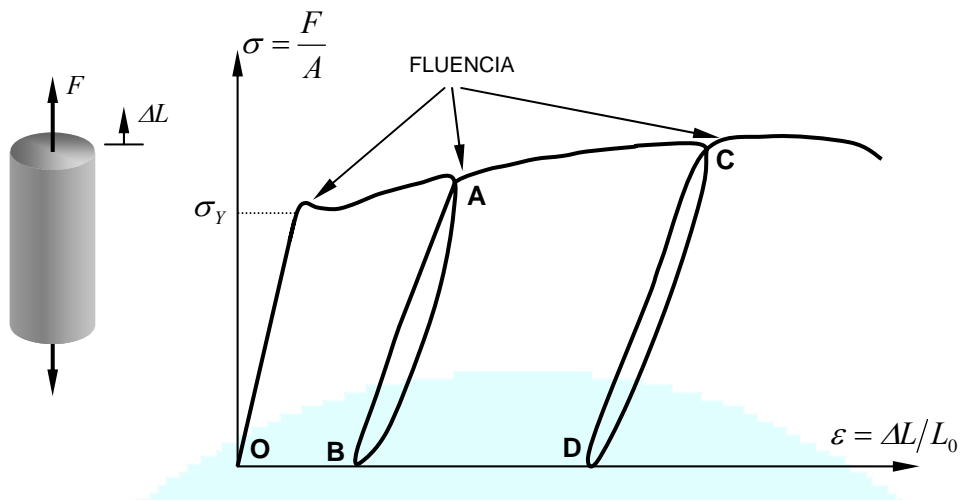


Figura 3-1. Ensayo de tracción uniaxial

- Una vez alcanzado el régimen elasto-plástico (es decir, después de que la tensión haya sobrepasado el valor  $\sigma_y$ ), las deformaciones no son recuperables en su totalidad. En efecto, observando un ciclo de carga y descarga como el **OAB** indicado en la figura, observamos que la deformación existente en el punto **A** vale

$$\varepsilon_A = \underbrace{(\varepsilon_A - \varepsilon_B)}_{\text{recuperable}} + \underbrace{\varepsilon_B}_{\text{no recuperable}}$$

- Alcanzado un cierto valor de las deformaciones, se produce rotura del material.

Idealizando la Figura 3-1, obtenemos un diagrama simplificado como el que se observa en la Figura 3-2.

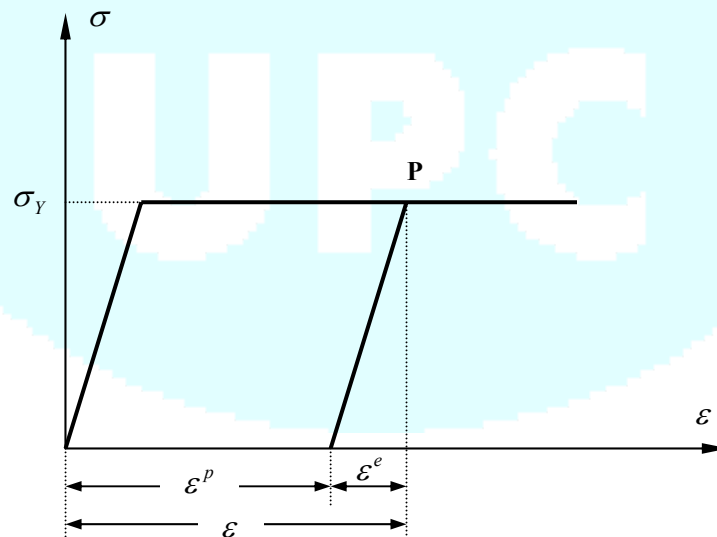


Figura 3-2. Idealización del comportamiento elastoplástico perfecto

En esta figura podemos ver que, para un punto **P** cualquiera en el espacio  $\sigma$ - $\varepsilon$ , la deformación tiene dos componentes: elástica (recuperable) y plástica (no recuperable):

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p$$

En la Figura 3-2 se ha representado un comportamiento **elasto-plástico perfecto**, en el cual las deformaciones crecen de manera indefinida a tensión constante igual al límite de fluencia. En el caso que la deformación elástica (recuperable) fuese cero, hablaríamos de un comportamiento **rígido-plástico perfecto**. Y si una vez alcanzado el límite de fluencia la tensión no se mantiene constante, sino que aumenta o disminuye con la deformación, hablaremos de comportamiento **rígido-plástico** o **reblandecible**, respectivamente. Todos estos casos se ilustran en la Figura 3-3.

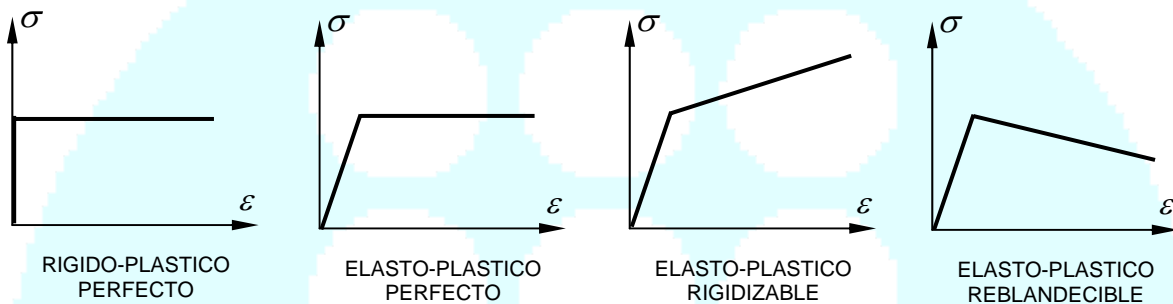


Figura 3-3. Curvas tensión–deformación idealizadas en plasticidad

### 3.2 Fundamentos básicos de la teoría de la plasticidad

Como hemos visto en el apartado anterior, el material experimenta cambios de comportamiento durante el proceso de carga. Por este motivo, las relaciones tensión–deformación se deben escribir de forma incremental. Utilizaremos las siguientes notaciones de manera indistinta:

$$\Delta\sigma_{ij} \leftrightarrow \Delta\varepsilon_{ij} \quad \text{o bien} \quad \dot{\sigma}_{ij} \leftrightarrow \dot{\varepsilon}_{ij} \quad \text{o bien} \quad d\sigma_{ij} \leftrightarrow d\varepsilon_{ij}$$

#### 3.2.1 Hipótesis de aditividad

El **principio básico** de la teoría de la plasticidad es que en todo momento puede haber deformaciones elásticas (recuperables) y plásticas (no recuperables), y que la deformación total es la suma de ambas:

$$\underbrace{d\varepsilon_{ij}}_{\text{total}} = \underbrace{d\varepsilon_{ij}^e}_{\text{elástica}} + \underbrace{d\varepsilon_{ij}^p}_{\text{plástica}} \quad (3.1)$$

Las deformaciones elásticas las calculamos con la teoría de la elasticidad, aunque ahora los módulos pueden no ser constantes:

$$d\varepsilon_{ij}^e = C_{ijkl} d\sigma_{kl} \quad (3.2)$$

donde  $\mathbf{C} = \mathbf{E}^{-1}$ , siendo  $\mathbf{E}$  la matriz de rigidez elástica.

Para calcular las deformaciones plásticas  $d\varepsilon_{ij}^p$  necesitamos algunos conceptos previos.

### 3.2.2 Superficie de fluencia

Con el concepto de **superficie de fluencia** generalizamos el de **límite de fluencia** en 1-D. La superficie de fluencia es una función de las tensiones (y otros parámetros en general) que separa, en el espacio de tensiones, aquellas combinaciones de tensiones que dan lugar a comportamientos de tipo elástico de comportamientos de tipo plástico.

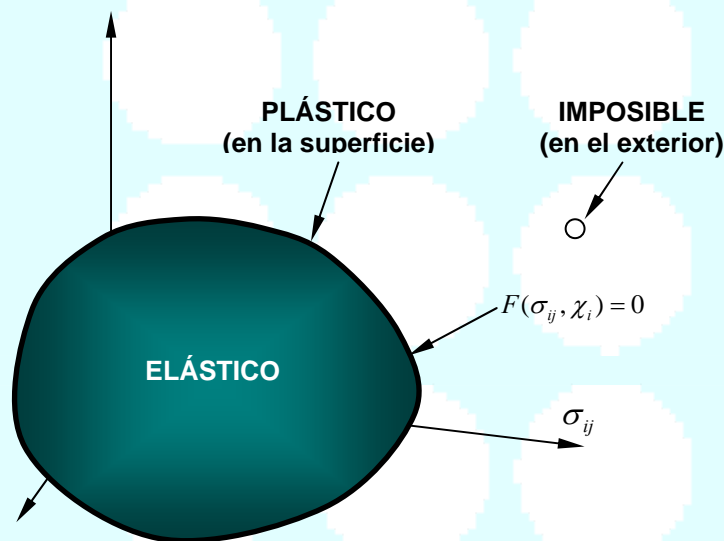


Figura 3-4. Superficie de fluencia

La expresión general de la superficie de fluencia se escribe como

$$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0 \quad (3.3)$$

donde  $\chi_i$  son parámetros que controlan su tamaño.

Generalizando los distintos tipos de comportamiento vistos en la Figura 3-3, tenemos:

- **Plasticidad perfecta:** la superficie de fluencia depende únicamente de las tensiones — no cambia de tamaño durante el proceso de carga. En este caso, la ecuación (3.3) se reduce a

$$F(\sigma_{ij}) = 0$$

- **Plasticidad rigidizable:** la superficie de fluencia se expande (se “hincha”) durante el proceso de carga.

- **Plasticidad reblandecible:** la superficie de fluencia se contrae durante el proceso de carga.

Cuando el cuerpo se encuentra en régimen plástico (es decir, cuando se están produciendo deformaciones plásticas), el estado de tensiones siempre debe estar sobre la superficie de fluencia. Así, dado un estado tensional definido por  $\sigma_{ij}^*$  y unos parámetros  $\chi_i^*$ , podemos tener:

$$\begin{aligned} F(\sigma_{ij}^*, \chi_i^*) < 0 &\Rightarrow \text{régimen elástico} \\ F(\sigma_{ij}^*, \chi_i^*) = 0 &\Rightarrow \text{régimen elastoplástico} \\ F(\sigma_{ij}^*, \chi_i^*) > 0 &\Rightarrow \text{inadmisible} \end{aligned}$$

### 3.2.3 Ley de fluencia

La ley de fluencia nos da la relación entre las distintas componentes de la deformación incremental plástica. Se supone que existe una función de las tensiones (y de otros parámetros en general)

$$G(\sigma_{ij}, \xi_i) = 0 \quad (3.4)$$

que llamamos **potencial plástico**, tal que las deformaciones plásticas se obtienen como

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.5)$$

donde  $d\lambda$  es un escalar que proporciona la *magnitud* de la deformación plástica, mientras que la *dirección* (en el espacio de deformaciones) viene dado por el gradiente de  $G$ : la dirección de la deformación plástica es paralela a la dirección del gradiente del potencial plástico, y por lo tanto, la dirección de la deformación plástica es perpendicular a las superficies  $G = \text{cte}$ . (Figura 3-5).

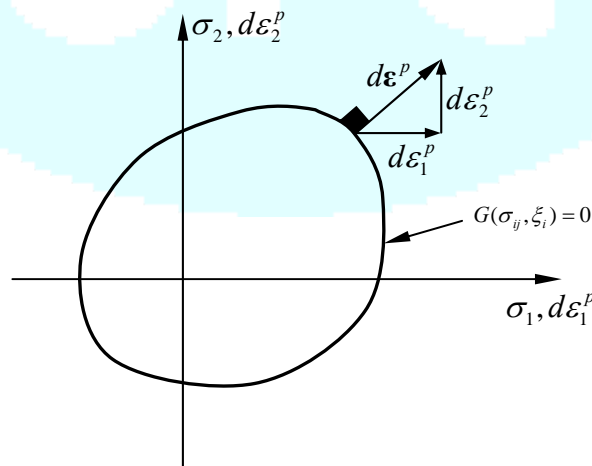


Figura 3-5. Potencial plástico y vector de deformaciones plásticas

Cuando la superficie de fluencia y el potencial plástico coinciden,  $F(\sigma_{ij}) = G(\sigma_{ij})$ , diremos que se trata de **plasticidad asociada**, y plasticidad no asociada en caso contrario.

### 3.2.4 Ley de endurecimiento

La ley de endurecimiento expresa la variación del tamaño, forma, o posición de la superficie de fluencia. Obviamente, esta ley no existe en el caso de plasticidad perfecta, ya que en este caso la superficie de fluencia permanece constante. En caso contrario, si el material es reblandecible o rigidizable, hay que especificar cómo varía la superficie de fluencia y, dado que la superficie de fluencia viene definida por la expresión (3.3), la ley de endurecimiento expresará la variación de los parámetros  $\chi_i$  que aparecen en aquella ecuación. Normalmente, estos parámetros se hacen depender de la deformación plástica acumulada:

$$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}^p) \quad (3.6)$$

### 3.3 Ecuación general de la plasticidad

Recapitulando lo visto hasta este punto, podemos decir que disponemos de las siguientes relaciones básicas:

$d\varepsilon_{ij} = d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p$	hipótesis de aditividad
$F(\sigma_{ij}, \chi_i) = 0$	superficie de fluencia
$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}}$	ley de fluencia
$\chi = \chi(\varepsilon_{ij}^p)$	ley de endurecimiento

Además, una vez hemos llegado a plasticidad (es decir, cuando están ocurriendo deformaciones plásticas), el punto en el espacio de tensiones que define el estado tensional debe estar **siempre encima de la superficie de fluencia**. Es decir, que debe cumplirse

$$F(\sigma_{ij}^*, \chi_i^*) = 0$$

Si damos ahora una variación infinitesimal de tensiones,  $d\sigma$ , la superficie de fluencia se mueve un poco pero debe cumplirse en cualquier caso que

$$dF = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \chi_q} d\chi_q = 0 \quad (3.7)$$

La ecuación (3.7) expresa la *condición de consistencia*.



### 3.3.1 Cálculo del incremento de deformación plástica

Dado que  $d\chi_q = \frac{\partial \chi_q}{\partial \varepsilon_{mn}^p} d\varepsilon_{mn}^p$  y que (ley de fluencia)  $d\varepsilon_{mn}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}}$ , substituyendo en (3.7),

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} + \frac{\partial F}{\partial \chi_q} \frac{\partial \chi_q}{\partial \varepsilon_{mn}^p} d\lambda \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} = 0$$

Despejando  $d\lambda$ , obtenemos finalmente

$$d\lambda = \frac{1}{H} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (3.8)$$

Es decir,  $d\lambda$  no puede ser cualquiera si queremos mantenemos encima de la superficie de fluencia. Obviamente,  $d\lambda$  tiene el valor de la Eq. (3.8) únicamente cuando se están produciendo deformaciones plásticas. En cualquier otro caso,  $d\lambda = 0$ :

$$\left. \begin{array}{l} F < 0 \\ F = 0 \text{ y } \dot{F} \leq 0 \\ F = 0 \text{ y } \dot{F} > 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} d\lambda = 0 \\ d\lambda = 0 \\ d\lambda \neq 0 \end{array} \quad (3.9)$$

Si  $d\lambda \neq 0$ , las deformaciones plásticas las obtenemos aplicando la ley de fluencia:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{H} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{ij}} \frac{\partial F}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \quad (3.10)$$

La variable  $H$  se denomina **módulo plástico**, y vale

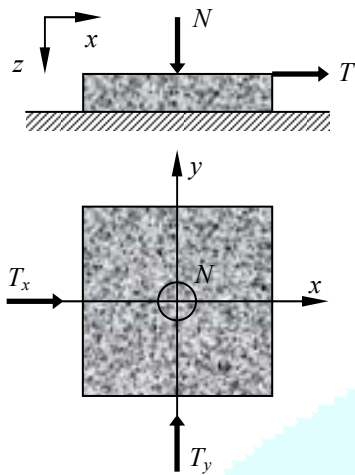
$$H = - \frac{\partial F}{\partial \chi_q} \frac{\partial \chi_q}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \frac{\partial G}{\partial \sigma_{mn}} \quad (3.11)$$

- $H = 0 \rightarrow$  plasticidad perfecta
- $H > 0 \rightarrow$  plasticidad rigidizable
- $H < 0 \rightarrow$  plasticidad reblandecible

Recordemos que, para plasticidad asociada,  $F \equiv G$ , y que por tanto habrá que modificar las ecuaciones anteriores de manera apropiada en este caso.

### 3.3.2 Ejemplo: Bloque rígido a fricción

Supongamos que tenemos un bloque rígido de planta cuadrada que puede deslizar sobre una superficie horizontal. Sobre el bloque aplicamos una fuerza normal al plano de deslizamiento,  $N$ , y otra fuerza paralela al plano,  $T$ , de componentes  $T_x$  y  $T_y$  (ver Figura 3-6). Suponemos un coeficiente de rozamiento  $\mu$  entre el bloque rígido y la superficie de deslizamiento.



En estas condiciones, el bloque se moverá cuando la resultante de las fuerzas horizontales (paralelas al plano de deslizamiento) sea tal que

$$\sqrt{T_x^2 + T_y^2} = \mu N$$

En este caso se produce movimiento y éste tiene lugar en la dirección de la resultante.

Por lo tanto, si definimos

$$f = T_x^2 + T_y^2 - \mu^2 N^2$$

tendremos las siguientes condiciones:

- $f < 0 \rightarrow$  no hay movimiento
- $f = 0 \rightarrow$  hay movimiento (“movimiento irrecuperable”)
- $f > 0 \rightarrow$  no es admisible: habría aceleración...

Figura 3-6. Ejemplo

Este sería un caso de plasticidad perfecta, ya que toda la deformación (movimiento en este caso) es irrecuperable. La representación gráfica de la función  $f$  (“superficie de fluencia”) está en la Figura 3-7.

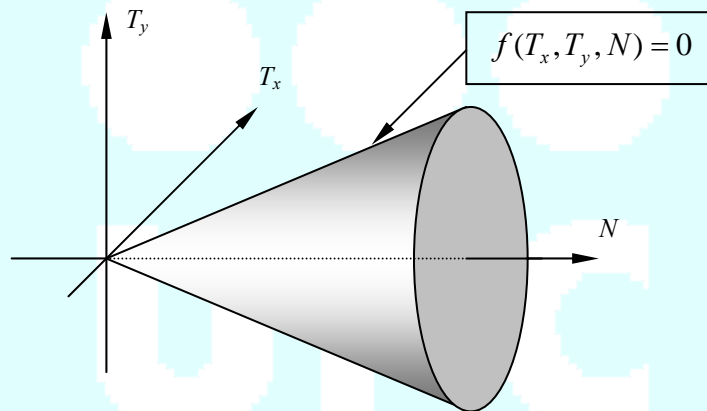


Figura 3-7. Superficie de fluencia para el ejemplo del bloque de fricción

Veamos ahora los movimientos, que siempre son sobre el plano horizontal de deslizamiento, en las direcciones  $x, y$ . Superponemos el plano de fuerzas  $T_x-T_y$  al de desplazamientos  $u_x-u_y$  tal como se ve en la Figura 3-8.

En la Figura 3-8 se han ilustrado tres trayectorias de tensiones OA, OB y OACD:

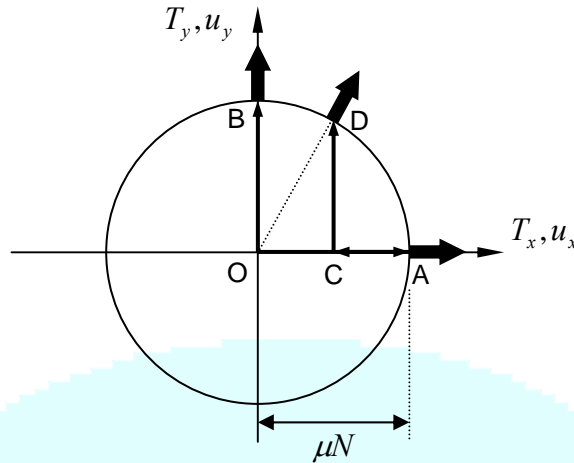


Figura 3-8. Sección transversal del cono de la Figura 3-7

- **Trayectoria OA:** aplicamos una fuerza horizontal únicamente en la dirección  $x$ . Al llegar al punto A y cumplirse la “condición de fluencia” se produce el movimiento y es también en la dirección  $x$ .
- **Trayectoria OB:** aplicamos una fuerza horizontal únicamente en la dirección  $y$ . Al llegar al punto B y cumplirse la “condición de fluencia” se produce el movimiento y es también en la dirección  $y$ .
- **Trayectoria OACD:** aplicamos primero una fuerza horizontal en la dirección  $x$ . Al llegar al punto A, reducimos la fuerza aplicada hasta llegar al punto C. En este momento, aplicamos una fuerza horizontal en la dirección  $y$ . Al llegar al punto D y cumplirse la “condición de fluencia” se produce movimiento **en la dirección de la resultante** (OD) y no en la dirección de la fuerza aplicada en aquel momento (CD).

Por lo tanto, el círculo de la Figura 3-8 es como el potencial plástico (las deformaciones–movimientos son perpendiculares al círculo). Podríamos escribir:

$$G \equiv T_x^2 + T_y^2 - K^2 = 0, \text{ siendo } K \text{ una constante}$$

y entonces tendríamos

$$du_x = d\lambda \frac{\partial G}{\partial T_x} = 2T_x d\lambda$$

$$du_y = d\lambda \frac{\partial G}{\partial T_y} = 2T_y d\lambda$$

$$du_z = d\lambda \frac{\partial G}{\partial N} = 0$$

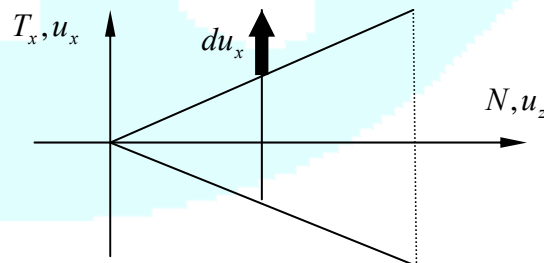


Figura 3-9. Sección según el plano  $T_x-N$

Es decir, que los desplazamientos según  $z$  son nulos. Si hacemos un corte al cono de la Figura 3-7 según el plano  $T_x-N$ , vemos (Figura 3-9) que el vector desplazamiento no es perpendicular a la superficie de fluencia. Esto sólo ocurre en el plano  $T_x-T_y$ , pero no en el espacio de fuerzas general  $T_x-T_y-N$ .

### 3.3.3 Generalización a plasticidad con $N$ superficies de fluencia

En algunos casos, pueden existir varias superficies de fluencia y potenciales plásticos, de manera que la ecuación (3.5) para el cálculo de las deformaciones plásticas se convierte en

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{ij}} + d\lambda_2 \frac{\partial G_2}{\partial \sigma_{ij}} + \dots + d\lambda_N \frac{\partial G_N}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda_p \frac{\partial G_p}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.12)$$

En la ecuación (3.12) únicamente intervienen los potenciales plásticos activos en un momento determinado. La condición de consistencia en este caso será

$$dF_1 = dF_2 = \dots = dF_\alpha = \dots = dF_N = 0 \quad (3.13)$$

siendo las superficies de fluencia

$$F_\alpha \equiv F_\alpha(\sigma_{ij}, \chi_{kl}) \quad (3.14)$$

Aplicando la condición de consistencia a cada una de las  $\alpha$  ( $\alpha = 1, \dots, N$ ) superficies de fluencia activas,

$$dF_\alpha = 0 = \frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \chi_{kl}} d\chi_{kl}$$

además sabemos que  $d\chi_{kl} = \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}^p} d\varepsilon_{mn}^p$  y que  $d\varepsilon_{mn}^p = d\lambda_p \frac{\partial G_p}{\partial \sigma_{mn}}$ . Por lo tanto,

$$\frac{\partial F_\alpha}{\partial \sigma_{rs}} d\sigma_{rs} + \frac{\partial F_\alpha}{\partial \chi_{kl}} \frac{\partial \chi_{kl}}{\partial \varepsilon_{mn}^p} \left[ d\lambda_1 \frac{\partial G_1}{\partial \sigma_{mn}} + \dots + d\lambda_N \frac{\partial G_N}{\partial \sigma_{mn}} \right] \quad \alpha = 1, \dots, N \quad (3.15)$$

Las ecuaciones (3.15) representan un sistema de  $N$  ecuaciones lineales en las  $N$  incógnitas  $d\lambda_1, d\lambda_2, \dots, d\lambda_N$ . Resolviendo este sistema, obtenemos los valores de las incógnitas para introducirlos en la ecuación (3.12).

### 3.4 Modelos de plasticidad perfecta

Para plasticidad isótropa es más conveniente plantear las ecuaciones en términos de los invariantes, al igual que ya se ha visto en el Capítulo 2 al hablar de Elasticidad.

Para ello escogemos las siguientes formas de los invariantes, obtenidas a partir de los invariantes definidos en las Eqs. (2.6) a (2.9).

Los **invariantes de tensiones** son:

$$p = \frac{1}{3}I_1 = \frac{1}{3}\sigma_{kk} = \frac{1}{3}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) = \frac{1}{3}(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z) \quad (3.16)$$

$$J = \sqrt{J_2} = \sqrt{\frac{1}{2}s_{ij}s_{ij}} = \sqrt{\frac{1}{2}[(\sigma_x - p)^2 + (\sigma_y - p)^2 + (\sigma_z - p)^2 + 2\tau_{xy}^2 + 2\tau_{xz}^2 + 2\tau_{yz}^2]} \quad (3.17)$$

$$\theta = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ \frac{3\sqrt{3} J_3}{2 J^3} \right] = \tan^{-1} \left[ -\frac{1}{\sqrt{3}} \frac{\sigma_1 - 2\sigma_2 + \sigma_3}{\sigma_1 - \sigma_3} \right] \quad (3.18)$$

El tercero de los invariantes propuestos,  $\theta$ , se denomina **ángulo de Lode** y puede adoptar valores comprendidos entre  $-30^\circ$  y  $+30^\circ$ . Efectivamente, suponiendo que las tensiones principales están ordenadas de forma que  $\sigma_1 > \sigma_2 > \sigma_3$ , tenemos:

$$\begin{aligned} \sigma_1 = \sigma_2 &\Rightarrow \theta = +30^\circ \\ \sigma_3 = \sigma_2 &\Rightarrow \theta = -30^\circ \\ \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} &\Rightarrow \theta = 0^\circ \end{aligned}$$

Si nos referimos al espacio de tensiones principales  $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$ , dado un estado tensional definido por un punto  $\Sigma = (\sigma_1^*, \sigma_2^*, \sigma_3^*)$ , los invariantes definidos por las ecuaciones (3.16), (3.17) y (3.18) tienen la siguiente interpretación geométrica:

- $\sqrt{3}p$  representa la distancia del origen de coordenadas al plano octaédrico (ver Figura 3-10) que contiene  $\Sigma$ .
- $\sqrt{2}J$  representa la distancia, medida sobre el plano octaédrico, entre el punto  $\Sigma$  y la proyección sobre dicho plano del origen de coordenadas (ver Figura 3-11).
- La interpretación geométrica del ángulo de Lode  $\theta$  puede verse en la Figura 3-11.

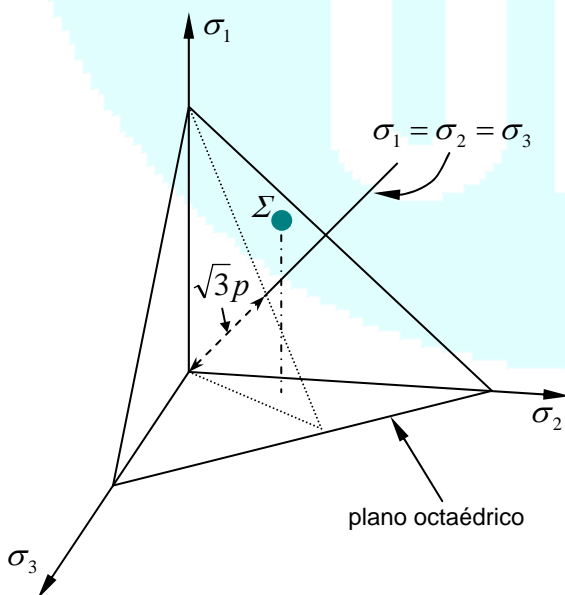


Figura 3-10. Plano octaédrico

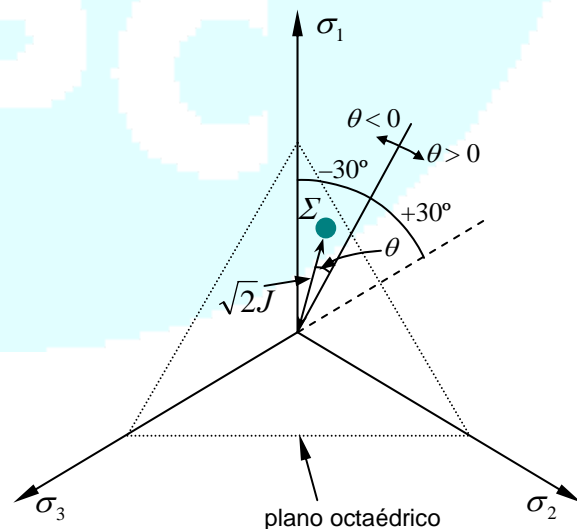


Figura 3-11. Proyección sobre el plano octaédrico

Análogamente, los invariantes de deformación son:

$$\varepsilon_V = I_1^\varepsilon = \varepsilon_{kk} = \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3 = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (3.19)$$

$$E = 2\sqrt{J_2^\varepsilon} = \sqrt{2e_{ij}e_{ij}} = \sqrt{2\left[\left(\varepsilon_x - \frac{\varepsilon_V}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_y - \frac{\varepsilon_V}{3}\right)^2 + \left(\varepsilon_z - \frac{\varepsilon_V}{3}\right)^2 + \frac{\gamma_{xy}^2 + \gamma_{xz}^2 + \gamma_{yz}^2}{2}\right]} \quad (3.20)$$

$$\theta_\varepsilon = -\frac{1}{3} \sin^{-1} \left[ 12\sqrt{3} \frac{J_3^\varepsilon}{E^3} \right] \quad (3.21)$$

El trabajo, en términos de los invariantes así definidos, resulta:

$$\dot{W} = p\dot{\varepsilon}_V + J\dot{E}(\sin \theta \sin \theta_\varepsilon + \cos \theta \cos \theta_\varepsilon) \quad (3.22)$$

En el caso habitual de que los ángulos de Lode en tensiones ( $\theta$ ) y en deformaciones ( $\theta_\varepsilon$ ) coincidan,

$$\dot{W} = p\dot{\varepsilon}_V + J\dot{E} \quad (3.23)$$

Las derivadas de los invariantes  $p, J, \theta$  con relación al tensor de tensiones que aparecen en las expresiones de las deformaciones plásticas son

$$\frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\delta_{ij}}{3} = \begin{bmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{s_{ij}}{2J} = \frac{1}{2J} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.24)$$

$$\frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} = -\frac{\sqrt{3}}{6J^3 \cos 3\theta} \begin{bmatrix} 2s_y s_z - s_x s_z - s_x s_y - 2(\tau_{yz}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{xy}^2) \\ 2s_x s_z - s_y s_z - s_x s_y - 2(\tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2 - \tau_{xy}^2) \\ 2s_x s_y - s_x s_z - s_y s_z - 2(\tau_{xy}^2 - \tau_{xz}^2 - \tau_{yz}^2) \\ 6(\tau_{yz} \tau_{xz} - s_z \tau_{xy}) \\ 6(\tau_{xy} \tau_{yz} - s_y \tau_{xz}) \\ 6(\tau_{xy} \tau_{xz} - s_x \tau_{yz}) \end{bmatrix} + \frac{3\sqrt{3}}{2J^5} \frac{\det \mathbf{s}}{2 \cos 3\theta} \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix}$$

### 3.4.1 Modelo de von Mises

En caso de isotropía, podemos expresar la superficie de fluencia en términos de invariantes:

$$F = F(p, J, \theta) \quad (3.25)$$

En plasticidad de metales, se suele tomar la superficie de fluencia independiente de la presión media  $p$  y por lo tanto ésta desaparece de la ecuación (3.24). El modelo de von Mises es un modelo de plasticidad asociada ( $F = G$ ) que además es independiente del tercer invariante (ángulo de Lode). La expresión de la superficie de fluencia es:

$$F \equiv J^2 - \frac{Y^2}{3} = 0 \quad (3.26)$$

donde  $Y$  es una tensión de comparación.

Calculemos ahora las deformaciones plásticas. Recordamos que

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}}$$

ya que se trata de plasticidad asociada. Además, de (3.24),

$$\frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = \frac{\partial J^2}{\partial \sigma_{ij}} = 2J \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} = s_{ij}$$

Por lo tanto, las deformaciones plásticas en el caso de von Mises son

$$d\varepsilon_{ij}^p = s_{ij} d\lambda \Leftrightarrow \begin{bmatrix} d\varepsilon_x^p \\ d\varepsilon_y^p \\ d\varepsilon_z^p \\ d\gamma_{xy}^p \\ d\gamma_{xz}^p \\ d\gamma_{yz}^p \end{bmatrix} = d\lambda \begin{bmatrix} s_x \\ s_y \\ s_z \\ 2\tau_{xy} \\ 2\tau_{xz} \\ 2\tau_{yz} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

La estructura de las ecuaciones (3.27) es parecida a la de un fluido newtoniano, visto en el Capítulo 2 (Eqs. 2.67). Las deformaciones totales (suma de las deformaciones elásticas y plásticas) son, después de substituir el valor de  $\lambda$ ,

$$d\varepsilon_{ij} = \underbrace{C_{ijkl} d\sigma_{kl}}_{\text{elástico}} + \underbrace{\frac{1}{H} \frac{s_{ij}}{4Y} \frac{s_{kl} d\sigma_{kl}}{Y}}_{\text{plástico}} \quad (3.28)$$

Las ecuaciones (3.28) se conocen como ecuaciones de Prandtl-Reuss.

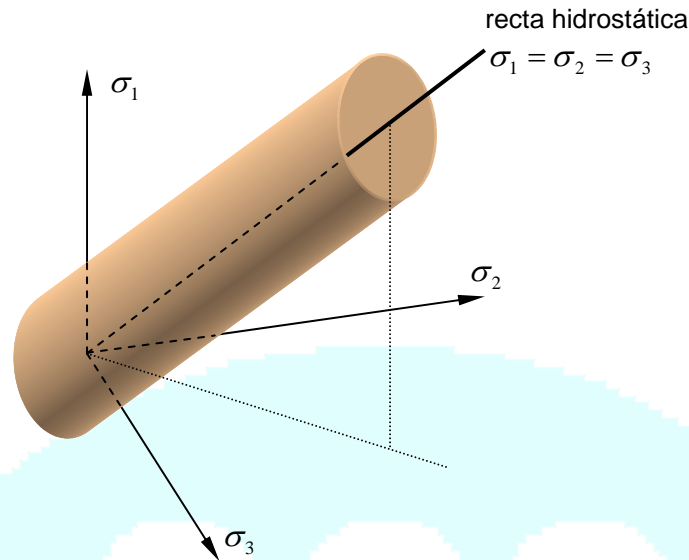


Figura 3-12. Superficie de fluencia de von Mises

La representación geométrica de la superficie de fluencia de von Mises puede verse en la Figura 3-12. Sus características principales son:

- Deformación volumétrica plástica nula.

$$d\varepsilon_{vol}^p = d\varepsilon_x^p + d\varepsilon_y^p + d\varepsilon_z^p = d\lambda(s_x + s_y + s_z) = d\lambda(\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z - 3p) = 0$$

como debía esperarse de  $\frac{\partial F}{\partial p} = 0$

- Para ensayos de tracción,  $\sigma_z \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$J^2 = \frac{1}{6} \times 2\sigma_z^2 = \frac{\sigma_z^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \frac{\sigma_z^2}{3} = \frac{Y^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \sigma_z = Y$$

Por lo tanto  $Y$  tiene el significado de límite de fluencia en el caso unidimensional.

- Para ensayos de corte puro,  $\tau_{xy} \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$J = \tau_{xy} \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy}^2 = \frac{Y^2}{3} \quad \Rightarrow \quad \tau_{xy} = \frac{Y}{\sqrt{3}}$$

- La dirección de los incrementos de deformación plástica es radial (Figura 3-13).



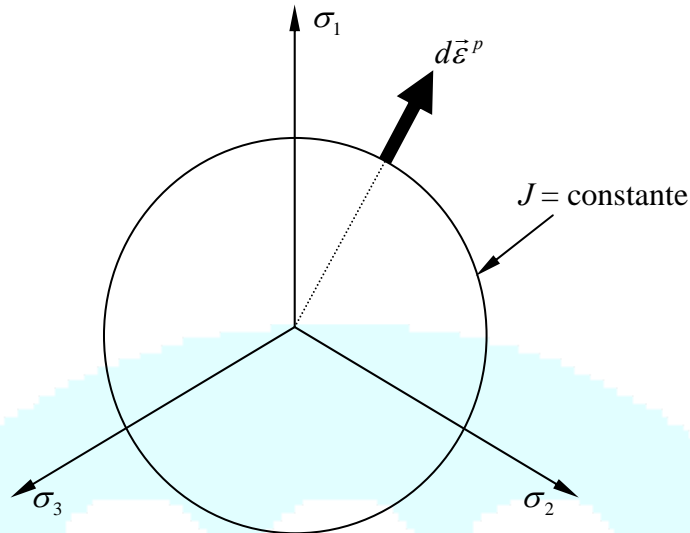


Figura 3-13. Dirección de los incrementos de deformación plástica en el modelo de von Mises

### 3.4.2 Modelo de Tresca

El modelo de Tresca es un modelo de plasticidad perfecta y asociada ( $F = G$ ) cuya función de fluencia es

$$F \equiv \max\{|\sigma_1 - \sigma_2|, |\sigma_2 - \sigma_3|, |\sigma_1 - \sigma_3|\} - Y = 0 \quad (3.29)$$

donde, de nuevo,  $Y$  es una tensión de comparación. Esta forma de escribir la ecuación no es muy conveniente. Sin embargo, en términos de los invariantes, la superficie de fluencia sería

$$F \equiv \frac{27J_2^3}{16Y^2} \left[ \frac{4}{27} - \frac{J_3^2}{J_2^3} \right] - \left[ 1 - \frac{3J_2}{Y^2} \right]^2 = 0 \quad (3.30)$$

que es demasiado complicada. Expresando la función de fluencia en términos de  $p$ ,  $J$  y  $\theta$ :

$$F \equiv 2J \cos \theta - Y = 0 \quad (3.31)$$

que es mucho más simple. Vemos como también el modelo de Tresca es independiente del primer invariante,  $p$ . Las deformaciones plásticas son:

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left[ 2 \cos \theta \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} - 2J \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] \quad (3.32)$$

Las derivadas que aparecen en (3.32) se obtienen de las expresiones en (3.24).

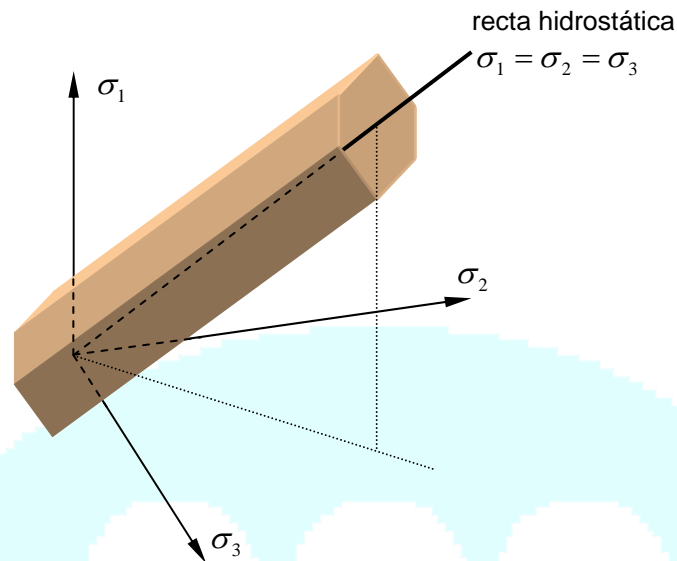


Figura 3-14. Superficie de fluencia de Tresca

La superficie de fluencia del modelo de Tresca puede verse en la Figura 3-14. Sus principales características son:

- Para ensayos de tracción,  $\sigma_z \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = \tau_{xy} = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\left. \begin{aligned} J^2 = \frac{\sigma_z^2}{3} \Rightarrow J = \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}} = \frac{Y}{3} \\ \sigma_2 = \sigma_3 = 0 \Rightarrow \theta = -30^\circ \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}} \cos(-30) = \frac{\sigma_z}{\sqrt{3}} \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sigma_z}{2} = \frac{Y}{2} \Rightarrow \sigma_z = Y$$

También, por tanto,  $Y$  tiene el significado de límite de fluencia en el caso 1-D.

- Para ensayos de corte puro,  $\tau_{xy} \neq 0$  y  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma_z = \tau_{xz} = \tau_{yz} = 0$

$$\left. \begin{aligned} \sigma_2 = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \\ \theta = 0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow 2\tau_{xy} \cos \theta = 2\tau_{xy} = Y \Rightarrow \tau_{xy} = \frac{Y}{2}$$

- Todas las deformaciones tienen la misma dirección excepto en las esquinas (Figura 3-15)
- En deformación plana,  $\dot{\epsilon}_2 = 0$ ,  $\dot{\epsilon}_1 = -\dot{\epsilon}_3 \Rightarrow \theta_\epsilon = 0$  y por tanto cualquier punto del plano desviador es válido.

- En axisimetría,  $\dot{\epsilon}_\varphi = \dot{\epsilon}_2 = \frac{\dot{u}}{r}$ ,  $\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_\varphi + \dot{\epsilon}_3 = 0$

$$\text{Por Tresca, } \dot{\epsilon}_\varphi = \frac{\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3}{2} \Rightarrow \frac{3}{2}(\dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3) = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_1 + \dot{\epsilon}_3 = 0 \Rightarrow \dot{\epsilon}_\varphi = 0 \Rightarrow \dot{u} = 0$$

lo cual sólo da soluciones triviales. Por lo tanto, en rotura, el estado de tensiones debe ir hacia una esquina, es decir  $\sigma_1 = \sigma_2$  o bien  $\sigma_2 = \sigma_3$  (hipótesis de von Karman), donde todas las direcciones son en principio válidas.

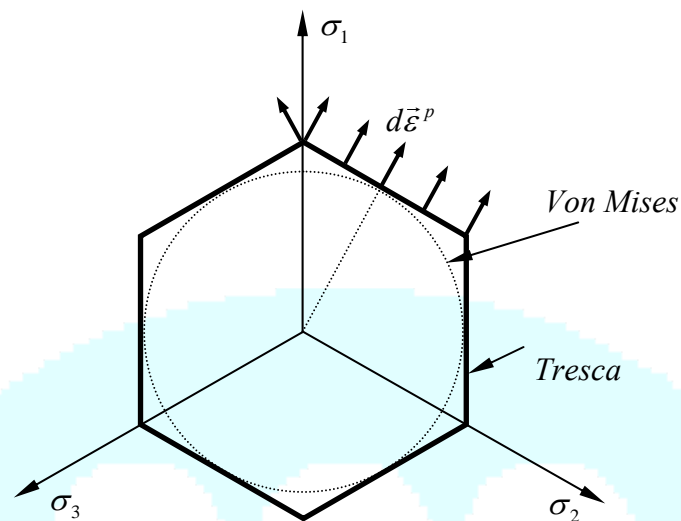


Figura 3-15. Dirección de los incrementos de deformación plástica en el modelo de Tresca

### 3.4.3 Modelo de Drucker-Prager

En materiales no metálicos, como el hormigón, los suelos, etc., la fluencia depende de la presión media  $p$ , lo cual no está previsto en los modelos anteriores de von Mises y de Tresca. Un modelo simple para estos materiales es el de Drucker-Prager, formulado en el marco de la plasticidad asociada ( $F = G$ ). La función de fluencia para este modelo es

$$F \equiv 3\alpha p + J - \kappa = 0 \quad (3.33)$$

donde  $\alpha$  es un parámetro relacionado con la fricción, y  $\kappa$  el valor de  $J$  para  $p = 0$  (relacionado con la cohesión). Este modelo es independiente del tercer invariante ( $\theta$ , ángulo de Lode) y por lo tanto las secciones de la superficie de fluencia sobre el plano octaédrico son círculos (igual que en el modelo de von Mises).

Las deformaciones plásticas son

$$d\epsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left[ 3\alpha \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} \right] = d\lambda \left[ \alpha \delta_{ij} + \frac{s_{ij}}{2J} \right] \quad (3.34)$$

En este caso, la deformación volumétrica plástica ya no es cero y vale

$$d\epsilon_{vol}^p = d\epsilon_x^p + d\epsilon_y^p + d\epsilon_z^p = d\lambda \left[ 3\alpha + \frac{\overbrace{s_x + s_y + s_z}^0}{2J} \right] = 3\alpha d\lambda \quad (3.35)$$

La superficie de fluencia de Drucker-Prager es un cono de revolución de eje la recta hidrostática que puede verse en la Figura 3-16. El vector de deformaciones plásticas es perpendicular a la superficie de fluencia (plasticidad asociada)

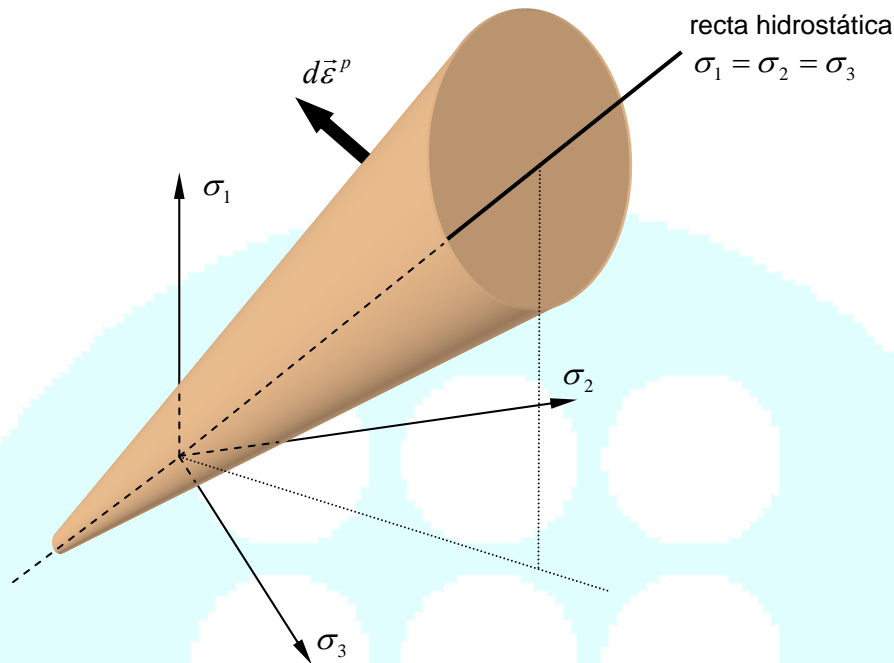


Figura 3-16. Superficie de fluencia de Drucker-Prager

### 3.4.4 Modelo de Mohr-Coulomb

Un modelo clásico para suelos es el criterio de rotura de Mohr-Coulomb. Su forma más simple, en función de las tensiones normales  $\sigma$  y tangenciales  $\tau$  sobre el plano de rotura es

$$\tau = c + \sigma \tan \varphi \quad (3.36)$$

donde  $c$  es la *cohesión* y  $\varphi$  el *ángulo de fricción*. En términos de las tensiones principales, esta ecuación resulta

$$\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{2} = \frac{\sigma_1 + \sigma_3}{2} \sin \varphi + c \cos \varphi \quad (3.37)$$

que es independiente de la tensión principal intermedia. En términos de los invariantes, la función de fluencia de Mohr-Coulomb se expresa como

$$F \equiv J - (-p + a)g(\theta) \quad \text{con} \quad g(\theta) = \frac{\sin \varphi}{\cos \theta + \frac{1}{\sqrt{3}} \sin \theta \sin \varphi} \quad \text{y} \quad a = \frac{c}{g(\theta)} \quad (3.38)$$

Este modelo es del tipo plasticidad asociada ( $F = G$ ). Vemos en la ecuación (3.38) que la superficie de fluencia depende de los tres invariantes:  $p$ ,  $J$ , y  $\theta$ .

Las deformaciones plásticas son en este caso

$$\begin{aligned}
 d\varepsilon_{ij}^p &= d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \left[ \frac{\partial F}{\partial p} \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial J} \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial F}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \\
 &= d\lambda \left[ g(\theta) \frac{\partial p}{\partial \sigma_{ij}} + \frac{\partial J}{\partial \sigma_{ij}} - (-p+a)g'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right] = \\
 &= d\lambda \left[ g(\theta) \frac{\delta_{ij}}{3} + \frac{s_{ij}}{2J} - (-p+a)g'(\theta) \frac{\partial \theta}{\partial \sigma_{ij}} \right]
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

La superficie de fluencia de Mohr-Coulomb es una pirámide de eje la recta hidrostática, cuya sección transversal (sobre el plano octaédrico) es un hexágono irregular. La superficie de fluencia en el espacio de tensiones principales puede verse en la Figura 3-17. La sección sobre el plano octaédrico puede verse en la Figura 3-18. La Figura 3-19 muestra la superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio  $p$ - $J$ , que es la forma tradicional de representar el criterio de rotura de Mohr-Coulomb en mecánica del suelo.

Comparando el modelo de Drucker-Prager (§4.4.3) con el de Mohr-Coulomb, vemos que para que en un análisis de **deformación plana** ambos modelos coincidan, es necesario que las constantes que aparecen en el modelo de Drucker-Prager, Eq. (3.33), sean

$$\alpha = \frac{\tan \varphi}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \quad \kappa = \frac{3c}{\sqrt{9 + 12 \tan^2 \varphi}} \tag{3.40}$$

Por otra parte, si consideramos una situación **axisimétrica en compresión triaxial** (es decir, con  $\sigma_1 > \sigma_2 = \sigma_3$ ), las constantes anteriores serían

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{9 - \sin \varphi}} \quad \kappa = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{9 - \sin \varphi}} \tag{3.41}$$

y para **extensión triaxial** ( $\sigma_1 = \sigma_2 > \sigma_3$ )

$$\alpha = \frac{2 \sin \varphi}{\sqrt{9 + \sin \varphi}} \quad \kappa = \frac{6c \cos \varphi}{\sqrt{9 + \sin \varphi}} \tag{3.42}$$

Las ecuaciones (3.40), (3.41) y (3.42) muestran claramente que una definición apropiada de los coeficientes  $\alpha$  y  $\kappa$  es necesaria para conducir análisis realistas.

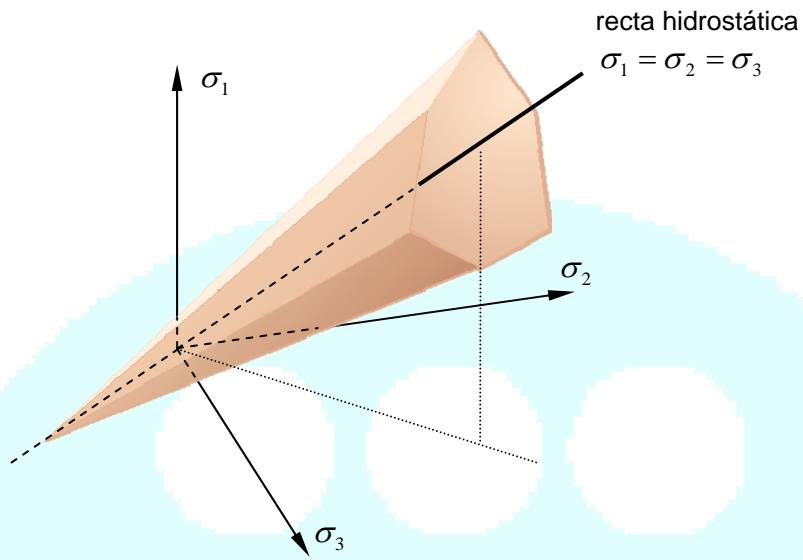


Figura 3-17. Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el espacio de tensiones principales

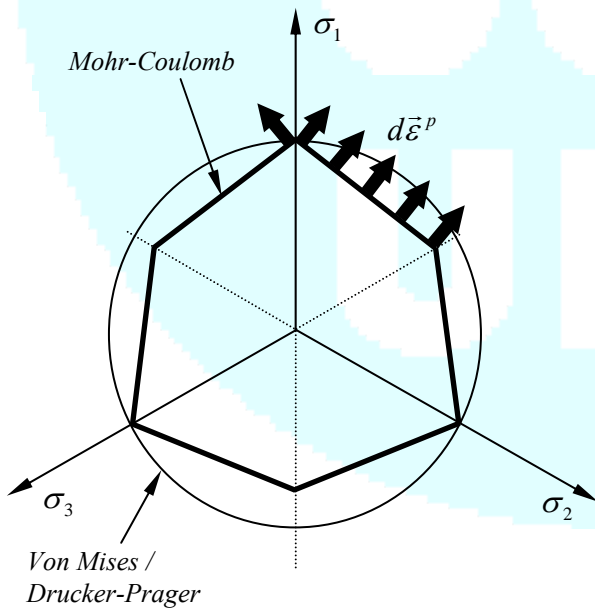


Figura 3-18. Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el plano octaédrico

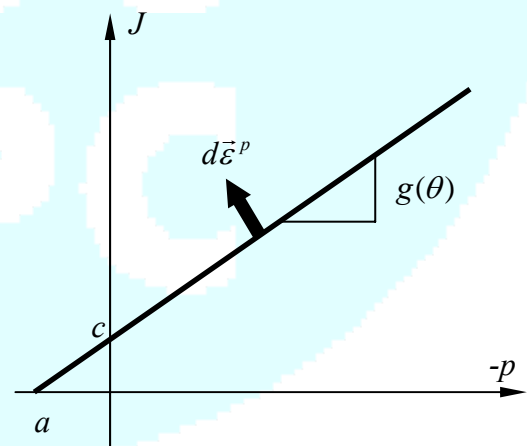


Figura 3-19. Superficie de fluencia de Mohr-Coulomb en el plano  $p$ - $J$

### 3.5 Modelos de plasticidad endurecible

En este apartado se discute brevemente el caso de plasticidad endurecible, en el que la superficie de fluencia no se mantiene constante, sino que puede cambiar el tamaño, la forma y/o la posición de la misma durante el proceso de deformación plástica.

#### 3.5.1 Rigidización isótropa

El tamaño de la superficie de fluencia aumenta, pero la superficie no cambia su posición. Para ilustrar ese caso, consideremos el modelo de von Mises visto en el apartado anterior, modificando la expresión de la función de fluencia de la siguiente manera

$$F \equiv J - \kappa = 0 \quad (3.43)$$

Donde  $\kappa$  es una variable que puede depender de la **deformación plástica** (en cuyo caso hablaremos de “*strain-hardening*”) o del **trabajo plástico** (“*work-hardening*”):

- a) Strain-hardening:  $\kappa = f\left(\int dE^p\right)$ , siendo  $dE^p = \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p}$
- b) Work-hardening:  $\kappa = f\left(\int dW^p\right)$ , siendo  $dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$

Considerando el caso a) anterior, se podría aplicar la fórmula general (3.9) para los incrementos de deformaciones plásticas. Sin embargo, en el caso de plasticidad de von Mises, se puede hacer más rápidamente de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} d\varepsilon_{ij}^p &= s_{ij} d\lambda \quad [\text{Eq. (3.25)}] \\ dE^p &= \sqrt{2d\varepsilon_{ij}^p d\varepsilon_{ij}^p} = \sqrt{2s_{ij} d\lambda s_{ij} d\lambda} = \sqrt{4(d\lambda)^2 J^2} = 2J d\lambda \\ d\lambda &= \frac{1}{2} \frac{dE^p}{J} \end{aligned}$$

Por lo tanto, las deformaciones plásticas las obtenemos así:

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{1}{2} \frac{dE^p}{J} s_{ij} = \frac{1}{2} \frac{d\kappa}{JH'} s_{ij} = \frac{1}{2JH'} \left( \frac{\partial \kappa}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl} \right) s_{ij} \quad (3.44)$$

donde  $H' = \frac{d\kappa}{dE^p} = \frac{dJ}{dE^p}$ .

Para el caso b), “*work-hardening*,” tenemos que  $\kappa = f_w(W^p)$ , siendo el trabajo plástico  $W^p = \int \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p$ . Generalizando la expresión de la función de fluencia,

$$F \equiv f(\sigma_{ij}) - f_w(W^p) \quad (3.45)$$

Calculando ahora las deformaciones plásticas, recordando que este es un caso de plasticidad asociada,

$$d\varepsilon_{ij}^p = d\lambda \frac{\partial F}{\partial \sigma_{ij}} = d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}}$$

$$dW^p = \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p = \sigma_{ij} d\lambda \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \Rightarrow d\lambda = \frac{dW^p}{\sigma_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}}$$

por lo tanto, las deformaciones plásticas serán

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{dW^p}{\sigma_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.46)$$

Aplicando la condición de consistencia,

$$dF = \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} d\sigma_{ij} - f'_w(W^p) dW^p = 0 \quad (3.47)$$

De la ecuación (3.47) podemos deducir el valor del incremento de trabajo plástico,

$$dW^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{f'_w(W^p)}$$

que substituido en la ecuación (3.46) nos proporciona finalmente la expresión de las deformaciones plásticas para un material “work-hardening”

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} d\sigma_{pq}}{f'_w(W^p) \sigma_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.48)$$

A veces se usa  $\sigma_{kl} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} = nf$ , siendo  $f$  una función homogénea de orden  $n$ .



### 3.5.2 Rigidización cinemática

En vez de expandir la superficie de fluencia, a veces es más realista moverla y dejarla del mismo tamaño: en este caso hablaremos de rigidización cinemática (Figura 3-20).

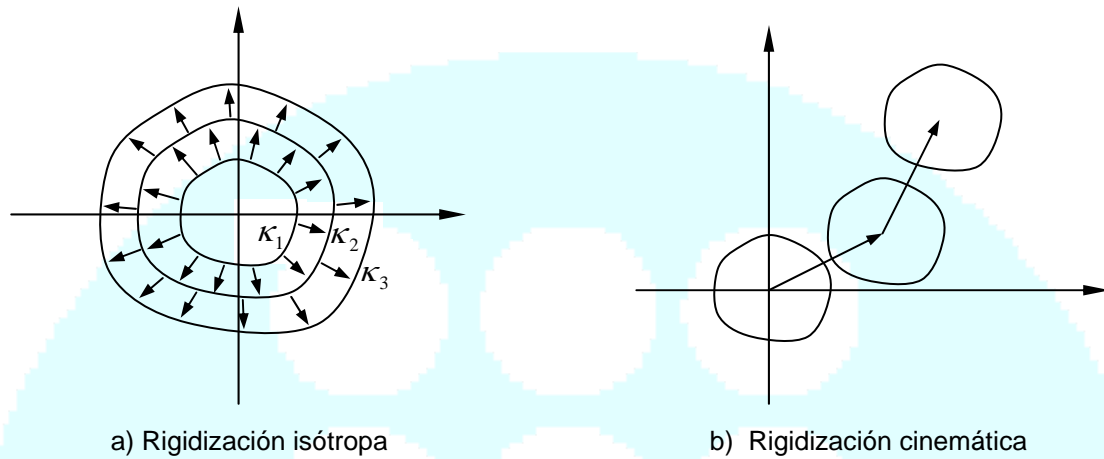


Figura 3-20. Rigidización isotrópica y rigidización cinemática

#### 3.5.2.1 Modelo de Prager

En este modelo la superficie de fluencia se expresa como

$$\begin{aligned}
 F &\equiv f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \\
 \dot{\alpha}_{ij} &= c \dot{\epsilon}_{ij}^p
 \end{aligned}
 \tag{3.49}$$

El movimiento de la superficie de fluencia tiene lugar en la dirección del flujo plástico (es decir, en la dirección del vector de deformaciones plásticas). Además, en el caso de plasticidad asociada, el movimiento se produce en la dirección de la normal a la superficie de fluencia (dado que  $F = G$ ).

Recordando la ecuación general de la plasticidad (3.9), y teniendo en cuenta que

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \alpha_{pq}}{\partial \epsilon_{mn}^p} &= c \\
 \frac{\partial f}{\partial \alpha_{pq}} &= \frac{\partial f}{\partial (\sigma_{pq} - \alpha_{pq})} \frac{\partial (\sigma_{pq} - \alpha_{pq})}{\partial \alpha_{pq}} = - \frac{\partial f}{\partial (\sigma_{pq} - \alpha_{pq})} = - \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}
 \end{aligned}$$

obtenemos

$$d\varepsilon_{ij}^p = \frac{\frac{\partial f}{\partial \sigma_{kl}} d\sigma_{kl}}{c \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{pq}}} \frac{\partial f}{\partial \sigma_{ij}} \quad (3.50)$$

### 3.5.2.2 Modelo de Ziegler

Ziegler propuso una modificación al modelo de Prager, consistente en imponer que el movimiento se produce en la dirección que une el centro de la superficie de fluencia con el punto que indica el estado tensional:

$$\begin{aligned} F &\equiv f(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) = 0 \\ \dot{\alpha}_{ij} &= \dot{\mu}(\sigma_{ij} - \alpha_{ij}) \\ \dot{\mu} &= g(\dot{\varepsilon}_{ij}^p) \end{aligned} \quad (3.51)$$

Los modelos de Ziegler y Prager coinciden para el caso de que la superficie de fluencia sea un círculo, pero no en general (ver ejemplo para una elipse en la Figura 3-21).

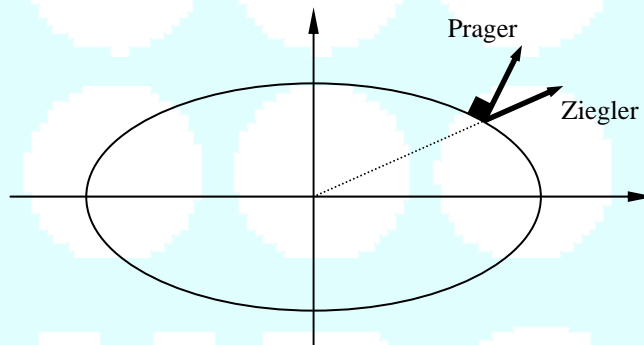


Figura 3-21. Dirección del movimiento en los modelos de Prager y Ziegler

## 3.6 Definición de Drucker de material estable

Según Drucker la estabilidad de un material se establece a través de dos condiciones:

- 1) El trabajo plástico realizado por un agente externo durante la aplicación de un conjunto *incremental* de fuerzas sobre los *cambios* de desplazamientos generados por ellos mismos, es positivo.
- 2) El trabajo neto total realizado por un agente externo durante un ciclo de carga y descarga debe ser no negativo.

Supongamos un cierto material sobre el que aplicamos un ciclo cerrado de incrementos de tensión:

- En el instante inicial,  $t = 0$ , las tensiones son  $\sigma_{ij}^*$  y nos encontramos en el interior de la superficie de fluencia (comportamiento elástico).
- En este instante, aplicamos un incremento de fuerzas que nos llevan a unas tensiones  $\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^* + \delta\sigma_{ij}$
- El incremento aplicado es tal, que parte de la trayectoria en el espacio de tensiones dará lugar a un comportamiento elástico, y parte a un comportamiento elastoplástico:

De  $t = 0$  a  $t = t_1$ , comportamiento elástico,  $\sigma_{ij}^* \rightarrow \sigma_{ij}^e$

De  $t = t_1$  a  $t = t_1 + \delta t$ , comportamiento elastoplástico,  $\sigma_{ij}^e \rightarrow \sigma_{ij}^* + \delta\sigma_{ij}$

- Después se retiran las fuerzas y las tensiones vuelven a  $\sigma_{ij}^*$

La Figura 3-22 ilustra esta secuencia.

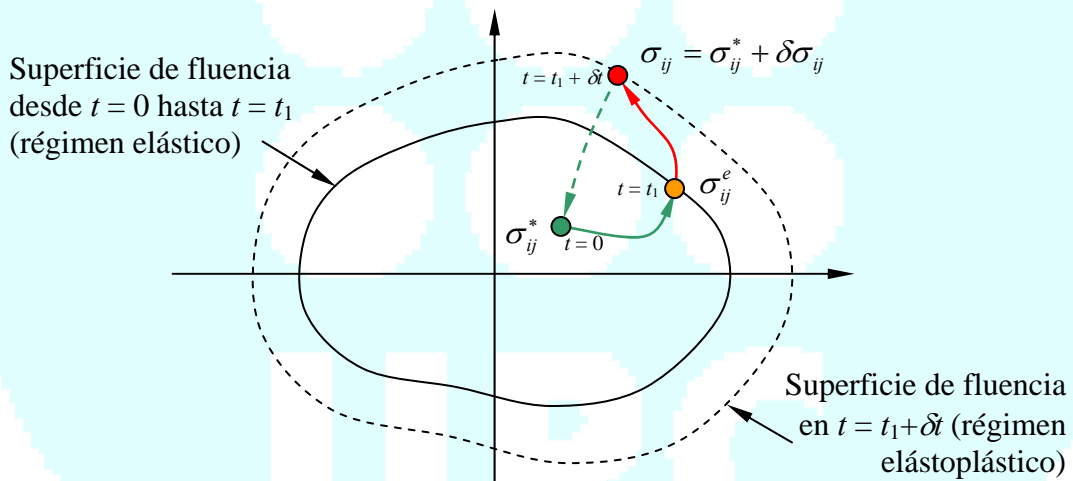


Figura 3-22. Ejemplo de ciclo cerrado de aplicación de fuerzas

El trabajo neto lo calculamos como

$$\underbrace{dW_n}_{\text{trabajo neto}} = \underbrace{dW_t}_{\text{trabajo total}} - \underbrace{dW_0}_{\text{trabajo realizado por } \sigma_{ij}^*} \quad (3.52)$$

donde

$$\begin{aligned}
 dW_t &= \int_0^{t_1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e dt + \int_{t_1}^{t_1+\delta t} \sigma_{ij} (d\varepsilon_{ij}^e + d\varepsilon_{ij}^p) dt + \int_{t_1+\delta t}^{t_2} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e dt \\
 &= \underbrace{\int_0^{t_1} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^e}_{0} + \int_{t_1}^{t_1+\delta t} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p dt \\
 &= \int_{t_1}^{t_1+\delta t} \sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p dt
 \end{aligned}$$

$$dW_0 = \int_{t_1}^{t_1+\delta t} \sigma_{ij}^* d\varepsilon_{ij}^p dt$$

y por lo tanto,

$$dW_n = dW_t - dW_0 = \int_{t_1}^{t_1+\delta t} (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p dt \geq 0 \quad (3.53)$$

La ecuación (3.53) expresa el **segundo postulado** de Drucker. Como (3.52) es válida para cualquier tipo de carga y para  $\delta t \rightarrow 0$ , este postulado nos conduce a las condiciones de **estabilidad general** de Drucker:

$$\begin{aligned}
 (\sigma_{ij} - \sigma_{ij}^*) d\varepsilon_{ij}^p &\geq 0 \\
 (\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^*) \cdot d\vec{\varepsilon}^p &\geq 0
 \end{aligned} \quad (3.54)$$

De manera análoga, el **primer postulado** de Drucker nos conduciría a las condiciones de **estabilidad local**:

$$\begin{aligned}
 d\sigma_{ij} d\varepsilon_{ij}^p &> 0 \\
 d\vec{\sigma} \cdot d\vec{\varepsilon}^p &> 0
 \end{aligned} \quad (3.55)$$

Consecuencias de los postulados de estabilidad de Drucker:

- La ecuación (3.54) nos dice que los vectores  $\vec{\sigma} - \vec{\sigma}^*$  y  $d\vec{\varepsilon}^p$  forman ángulos no obtusos, y por lo tanto que **la superficie de fluencia debe ser convexa**.
- Por el mismo razonamiento, a partir de la ecuación (3.55),  $d\vec{\varepsilon}^p$  debe ser normal a la superficie de fluencia: plasticidad asociada.

La Figura 3-23 presenta ejemplos de estabilidad a inestabilidad según Drucker.

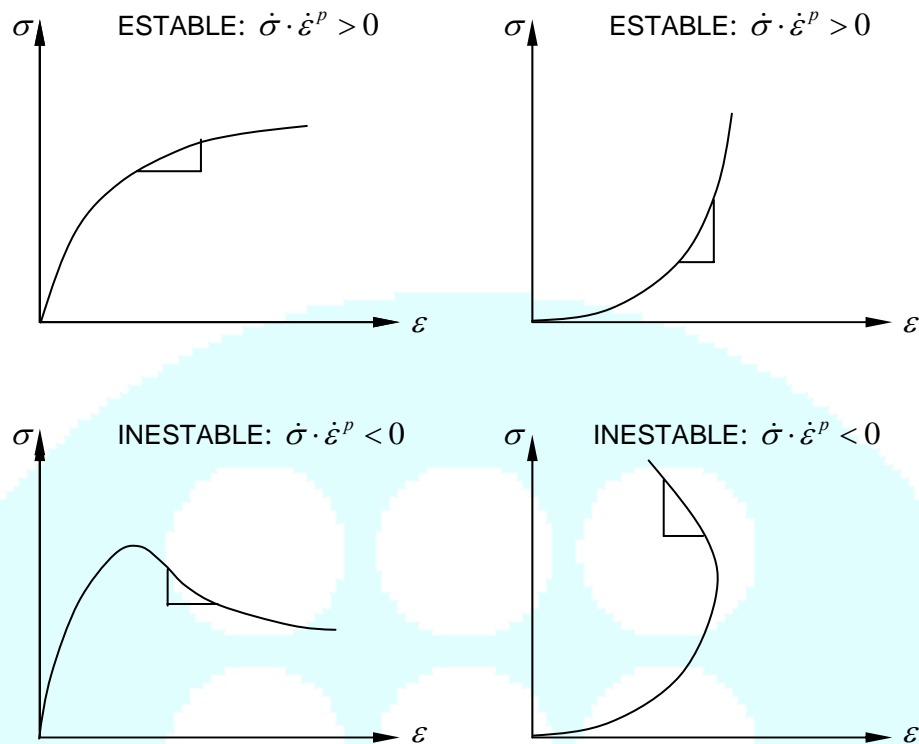


Figura 3-23. Ejemplos de estabilidad e inestabilidad según Drucker

Observaciones importantes:

- Las condiciones de estabilidad presentadas no son consecuencias termodinámicas
- No es preciso que la plasticidad sea asociada para que la solución de un problema sea única y estable.

### 3.7 Formulación de la plasticidad para elementos finitos

#### 3.7.1 Cálculo de la matriz de rigidez elastoplástica

En el análisis por elementos finitos procedemos normalmente a calcular los incrementos de tensión a partir de los incrementos de deformación. Para ello necesitamos conocer la matriz de rigidez elastoplástica,  $\mathbf{E}^{e-p}$  tal que

$$d\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{E}^{e-p} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.56)$$

Sabemos que

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = d\boldsymbol{\varepsilon}^e + d\boldsymbol{\varepsilon}^p$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^e = \mathbf{E}^{-1} d\boldsymbol{\sigma}, \text{ con } \mathbf{E} = \text{matriz de rigidez elástica}$$

$$d\boldsymbol{\varepsilon}^p = d\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$$

La condición de consistencia  $dF = 0 = \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : d\boldsymbol{\sigma} + \left[ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right]^T : d\lambda$  la podemos expresar también como

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : d\boldsymbol{\sigma} - A d\lambda = 0 \quad (3.57)$$

siendo  $A = -\frac{1}{d\lambda} \left[ \frac{\partial F}{\partial \lambda} \right]^T : d\lambda$ .

Las deformaciones totales (elásticas + plásticas) son

$$d\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{E}^{-1} : d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \quad (3.58)$$

Por lo tanto podemos escribir la siguiente relación matricial, agrupando las Eqs. (3.57) y (3.58):

$$\begin{bmatrix} d\boldsymbol{\varepsilon} \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{E}^{-1} & \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \\ \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T & -A \end{pmatrix} \begin{bmatrix} d\boldsymbol{\sigma} \\ d\lambda \end{bmatrix} \quad (3.59)$$

Multiplicando (3.58) por  $\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E}$ ,  $\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : d\boldsymbol{\varepsilon} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \underbrace{\mathbf{E} : \mathbf{E}^{-1}}_I : d\boldsymbol{\sigma} + d\lambda \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}$

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : d\boldsymbol{\sigma} = \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : d\boldsymbol{\varepsilon} - \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} d\lambda \quad (3.60)$$

Substituyendo en (3.57),

$$\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : d\boldsymbol{\varepsilon} - \left\{ A + \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right\} d\lambda \quad (3.61)$$

De donde podemos despejar  $d\lambda$ :

$$d\lambda = \frac{\left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : d\boldsymbol{\varepsilon}}{A + \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.62)$$

Finalmente, substituyendo (3.62) en (3.60),

$$d\boldsymbol{\sigma} = \left\{ \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E}}{A + \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \right\} d\boldsymbol{\varepsilon} \quad (3.63)$$

La matriz de rigidez elastoplástica es por tanto,

$$\mathbf{E}^{e-p} = \mathbf{E} - \frac{\mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E}}{A + \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}}} \quad (3.64)$$

### 3.7.2 Condición para que la matriz de rigidez sea simétrica

La matriz de rigidez en elementos finitos se obtiene como

$$\mathbf{K} = \int_V \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{e-p} \mathbf{B} dV \quad (3.65)$$

Para que  $\mathbf{K}$  sea simétrica, es suficiente con que  $\mathbf{B}^T \mathbf{E}^{e-p} \mathbf{B}$  lo sea, es decir, que

$$\mathbf{B}^T \mathbf{E}^{e-p} \mathbf{B} = \left( \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{e-p} \mathbf{B} \right)^T$$

pero  $\left( \mathbf{B}^T \mathbf{E}^{e-p} \mathbf{B} \right)^T = \mathbf{B}^T \left( \mathbf{E}^{e-p} \right)^T \mathbf{B}$ . Por lo tanto,  $\mathbf{K}$  es simétrica si  $\mathbf{E}^{e-p}$  lo es.

Simplificando la ecuación (3.64),

$$\mathbf{E}^{e-p} = \mathbf{E} - \frac{1}{k} \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} = \mathbf{E} - \frac{1}{k} \mathbf{E}' \quad (3.66)$$

Como  $\mathbf{E}$  es simétrica (matriz de rigidez elástica),  $\mathbf{E}^{e-p}$  será simétrica si  $\mathbf{E}'$  lo es, es decir si

$$\mathbf{E}' = \left( \mathbf{E}' \right)^T \quad (3.67)$$

$$(\mathbf{E}')^T = \left\{ \mathbf{E} : \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E} \right\}^T = \mathbf{E} : \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T : \mathbf{E}$$

Por tanto, la ecuación (3.67) se cumplirá si  $\frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T = \frac{\partial F}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \otimes \left[ \frac{\partial G}{\partial \boldsymbol{\sigma}} \right]^T$ , es decir si  $F = G$ , que es el caso de **plasticidad asociada**.

